Algebraische Gleichungen lösen – so gut es eben geht

1. Ziele der Lerneinheit

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie

- was eine Gleichung ist;
- was man unter einer Lösung einer Gleichung versteht;
- was man unter Äquivalenz versteht;
- dass Äquivalenzumformungen der Schlüssel zum Lösen von Gleichungen sind;
- was eine algebraische Gleichung, ein Polynom und der Grad eines Polynoms bzw. einer algebraischen Gleichung ist;
- was der Grad einer algebraischen Gleichung über die Anzahl ihrer Lösungen aussagt;
- dass man für algebraische Gleichungen in der Regel keine Lösungsformel hat, sodass die p-q-Formel eine Besonderheit darstellt;
- wie man bestimmte Gleichungen durch Substitution lösen kann;
- was man unter dem Prinzip der Nullteilerfreiheit versteht und wie dieses Prinzip beim Lösen algebraischer Gleichungen helfen kann;
- wie man eine Polynomdivision durchführt und wie diese beim Lösen algebraischer Gleichungen helfen kann.

2. Gleichungen, Äquivalenzumformungen und Lösungen von Gleichungen

In der Mittelstufe haben Sie sich sicher nie Gedanken darüber gemacht (oder: machen müssen), was eine Gleichung eigentlich ist. Und vielleicht ist es Ihnen auch nicht klar, was man unter der „Lösung“ einer Gleichung versteht?! *→ Übung 1*

Folgenden wichtigen Begriff kennen Sie aber schon aus der Mittelstufe: Ein **Term** ist ein korrekt gebildeter Rechenausdruck, in dem neben Rechenoperationen wie z.B. Plus und Mal noch Zahlen, Klammern und Platzhalter vorkommen können. Ein **Platzhalter** (andere Bezeichnungen sind **Unbekannte**, **Variable**, oder **Parameter**) ist ein Symbol, das das stellvertretend für eine Zahl steht; mögliche Platzhalter sind Buchstaben oder andere Zeichen wie $\square$ oder $\triangle$. Um einen Term zu berechnen, ist es zuerst erforderlich, alle in ihm vorkommenden Platzhalter durch Zahlen zu ersetzen, man sagt: die Platzhalter mit Zahlen zu **belegen**. *→ Übung 2*

Eine **Gleichung** ist eine Kette von Zeichen, die aus zwei Termen mit einem Gleichheitszeichen dazwischen besteht.

Beispiele. Folgendes sind Beispiele für Gleichungen: $4+5=10-1$ sowie $6x+3=15$ und $2x^2-5^x=\sqrt{6x+2}-5$ sowie $3=7$. Keine Gleichungen sind dagegen $5x-3$ (kein Gleichheitszeichen) und $2x=4+x^5=1$ (zwei Gleichheitszeichen) sowie $4\cdot\left(6x^2-3=8\right.$ (auf der linken Seite steht kein Term).

Es mag Sie überraschen, dass auch $3=7$ eine Gleichung ist, denn dies „ist doch falsch"! In der Tat können Gleichungen **wahr** („richtig") oder **falsch** sein! Wahr sind Gleichungen nur dann, wenn die Terme auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens denselben Wert ergeben. Zum Beispiel ist die Gleichung $4+5=10-1$ wahr und die Gleichung $3=7$ falsch.

Bei Gleichungen mit Platzhaltern kann man in der Regel nicht allgemein davon sprechen, dass sie wahr oder falsch sind. Zum Beispiel ist die Gleichung $6x+3=15$ wahr, wenn man den Platzhalter x mit der Zahl 2 belegt, und falsch, wenn man x mit irgendeiner anderen Zahl belegt. Die Gleichung $x^2=-1$ dagegen ist falsch für jede Belegung des Platzhalters x mit einer reellen Zahl, denn es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat -1 ist.

Eine **Lösung** einer Gleichung mit Platzhaltern ist eine Belegung der darin vorkommenden Variablen, *für die die Gleichung wahr ist*. Die Zahl 2 ist deshalb eine Lösung der Gleichung $6x+3=15$, da die Gleichung wahr ist, wenn man x mit 2 belegt. Da es keine andere Zahl gibt, für die die Gleichung wahr wird, wenn man x mit dieser Zahl belegt, hat die Gleichung keine andere Lösung außer 2. Die Gleichung $x^2=-1$ hat keine Lösung unter den reellen Zahlen, denn sie ist falsch, egal mit welcher reellen Zahl man die Unbekannte x belegt. *→ Übung 3*

Zwei Gleichungen sind **äquivalent** (lat. aequus „gleich"; valere „wert sein"), wenn sie die gleichen Lösungen haben.

Beispiele.

- $2x=6$ und $2x-2=4$ sind äquivalent: sie haben beide nur die Lösung $x=3$.
- $x^2=4$ und $x=2$ sind nicht äquivalent: Die erste Gleichung hat die beiden Lösungen $x=2$ und $x=-2$; letzteres ist aber keine Lösung der zweiten Gleichung.

Um anzudeuten, dass zwei Gleichungen äquivalent sind, schreibt man zwischen die Gleichungen manchmal einen „Doppel-Doppel-Pfeil" $\Leftrightarrow$, zum Beispiel $2x=6 \Leftrightarrow 2x-2=4$. Wichtig: **Zwischen zwei Gleichungen darf nie ein Gleichheitszeichen geschrieben werden! *Falsch*** ist es also zu schreiben $2x=6 \;=\; 2x-2=4$ ☹.

Als **Äquivalenzumformung** bezeichnet man jede Umformung einer Gleichung, bei der die ursprüngliche Gleichung zu der umgeformten Gleichung äquivalent ist. Äquivalenzumformungen verändern also nicht die Lösungen einer Gleichung: Die ursprüngliche und die umgeformte Gleichung haben dieselben Lösungen.

Äquivalenzumformungen werden verwendet, um die Lösungen einer Gleichung zu finden. Kann man zum Beispiel eine Gleichung auf die Form „$\text{Platzhalter} = \text{Zahl}$" bringen, so kann man dieser letzten Gleichung direkt ablesen, welche Lösung sie hat: Diese letzte Gleichung ist nur richtig, wenn der Platzhalter mit der Zahl auf der rechten Seite belegt wird. Und da diese Gleichung zu der ursprünglichen Gleichung äquivalent ist, ist diese Zahl auch die Lösung der ursprünglichen Gleichung. *→ Übung 4*

Welche Äquivalenzumformungen man anwendet, um eine Gleichung zu lösen, hängt sehr von der Struktur der Gleichung ab, also davon, welche Rechenoperationen in der Gleichung vorkommen. Wir schauen uns ein paar häufig vorkommende Gleichungstypen an.

3. Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind Gleichungen, in denen *nur eine* Variable und *nur in der 1. Potenz* vorkommt. Zum Beispiel ist $2(x+1)=x-3$ eine lineare Gleichung, $3x^2-4=8$ dagegen nicht.

Um eine lineare Gleichung durch Äquivalenzumformungen auf die Form „ $\text{Variable}=\text{Zahl}$ “ zu bringen, werden in der Regel die folgenden Schritte abgearbeitet:

Schritt 1. Falls Klammern in der Gleichung vorkommen: Die Klammern werden auf beiden Seiten der Gleichung aufgelöst.
Schritt 2. Auf beiden Seiten der Gleichung wird soweit wie möglich zusammengefasst.
Schritt 3. Durch Addieren und Subtrahieren werden alle Summanden mit Variable auf die eine und alle Summanden ohne Variable auf die andere Seite der Gleichung gebracht.
Schritt 4. Auf beiden Seiten der Gleichung wird erneut soweit wie möglich zusammengefasst.
Schritt 5. Es wird durch den Koeffizienten der Variable geteilt.

Schauen wir uns drei Beispiele an:

$2(x+1)=x-3$		Zuerst wird die Klammer aufgelöst.
$2x+2=x-3$	$\mid -x$	Jetzt werden alle Summanden, die die Variable enthalten, auf eine Seite gebracht. Durch Subtraktion von x verschwindet x auf der rechten Seite.
$x+2=-3$	$\mid -2$	Nun werden alle Summanden, die die Unbekannte nicht enthalten, auf die andere Seite gebracht. Dies geschieht hier durch Subtraktion von 2 auf beiden Seiten der Gleichung.
$\underline{\underline{x=-5}}$		

$x(x+1)=x^2+2x+2$		Zuerst wird die Klammer aufgelöst.
$x^2+x=x^2+2x+2$	$\mid -x^2-2x$	Durch Subtraktion von x^2 und $2x$ auf beiden Seiten der Gleichung verschwinden auf der rechten Seite alle Summanden, die die Variable enthalten.
$-x=2$	$\mid :(-1)$	Division beider Seiten der Gleichung durch (-1) ändert das Vorzeichen von $-x$.
$\underline{\underline{x=-2}}$		

$(x+2)(x-1)=x(x+1)+3x+4$		Zuerst werden die Klammern aufgelöst.
$x^2-x+2x-2=x^2+x+3x+4$		Vereinfachen auf beiden Seiten durch Zusammenfassen der Terme.
$x^2+x-2=x^2+4x+4$	$\mid -x^2-4x$	Durch Subtraktion von x^2 und $4x$ auf beiden Seiten der Gleichung verschwinden auf

		der rechten Seite alle Summanden, die die Variable enthalten.
$-3x-2=4$	$\mid +2$	Durch Addition von 2 auf beiden Seiten der Gleichung, stehen auf der linken Seite nur noch Summanden, die die Variable enthalten.
$-3x=6$	$\mid :(-3)$	Division beider Seiten durch den Faktor vor x bewirkt, dass dieser auf der linken Seite verschwindet.
$\underline{\underline{x=-2}}$		

→ *Übung 5*

4. Eine Warnung

Während die Lösung jeder linearen Gleichung ohne Probleme gefunden werden kann, gibt es kompliziertere Gleichungen, deren Lösung man nicht durch Umformen sondern nur nummerisch bestimmen kann. Ein Beispiel hierfür ist die komplizierte Gleichung $2x^2-5^x=\sqrt{6x+2}-5$. Zur Information: Nummerisch findet man, dass die Lösung hier ungefähr $0{,}81269458$ ist.

5. Reine Gleichungen

Reine Gleichungen sind Gleichungen, in denen nur eine Variable in nur einer Potenz vorkommt.

Reine Gleichungen sind zum Beispiel alle linearen Gleichungen und die Gleichungen $4x^2-5=3+2x^2$ sowie $2x^3=-16$.

Keine reinen Gleichungen sind dagegen

- $-3x^2+x=5$, denn die Variable kommt in der ersten und zweiten Potenz vor;
- $8x-3y=9$, denn es kommen zwei Variablen vor;
- $2^x+4=6$, denn die Variable kommt im Exponenten vor.

Beim Lösen einer reinen Gleichung arbeitet man genau wie beim Lösen einer linearen Gleichung. Am Ende des Umformungsprozesses durch Äquivalenzumformungen steht jedoch nicht eine Gleichung der Form $x=\text{Zahl}$ sondern $x^n=\text{Zahl}$.

Die Gleichung $x^n=z$ wird durch Wurzelziehen gelöst. Dabei muss man folgendes beachten

Exponent n	Zahl z	Lösungen
gerade	positiv	$x=\sqrt[n]{z}$ **und** $x=-\sqrt[n]{z}$
	negativ	keine
ungerade	positiv oder negativ	$x=\sqrt[n]{z}$

Auch hier schauen wir uns ein paar Beispiele an:

$5x^2-3=42 \quad \mid +3$	$6-3x^4=27 \quad \mid -6$	$12x^3-7=89 \quad \mid +7$	$23-0{,}5x^5=144{,}5 \quad \mid -23$

$5x^2 = 45 \quad \vert :5$ $x^2 = 9 \quad \vert \sqrt{\ }$ $x = \pm 3$ $5x^2 - 3 = 42$ hat die beiden Lösungen $x = 3$ sowie $x = -3$.	$-3x^4 = 21 \quad \vert :(-3)$ $x^4 = -7$ Aus einer negativen Zahl kann keine vierte Wurzel gezogen werden. $6 - 3x^4 = 27$ hat deshalb keine (reelle) Lösung.	$12x^3 = 96 \quad \vert :12$ $x^3 = 8 \quad \vert \sqrt[3]{\ }$ $x = 2$ $12x^3 - 7 = 89$ hat also die (alleinige) Lösung $x = 2$.	$-0{,}5x^5 = 121{,}5 \quad \vert :(-0{,}5)$ $x^5 = -243 \quad \vert \sqrt[5]{\ }$ $x = -3$ $23 - 0{,}5x^5 = 144{,}5$ hat also die (alleinige) Lösung $x = -3$.

→ *Übung 6*

6. Begriffsbestimmung: Algebraische Gleichungen

Reine Gleichungen sind ein Spezialfall der sogenannten Algebraischen Gleichungen**.**

Algebraische Gleichungen sind Gleichungen, deren Terme Summen sind, die als Summanden Produkte von Zahlen mit natürlichen Potenzen einer Unbekannten haben. Ein solcher Term wird in der Mathematik ein **Polynom** genannt. Die Zahlen vor den Unbekannten, nennt man auch **Koeffizienten**.

Polynome sind zum Beispiel $1 + x + x^2 + x^3$ und $1 + 2x - x^4$ sowie $-8x^{10} + 5x^6 - 2x^3 + x^2 + 4$. Nach mathematischer Sitte wollen wir Polynome in der Regel so aufschreiben, dass die Potenzen der Unbekannten von links nach rechts kleiner werden. Dies ist beim letzten Polynom schon der Fall. Die beiden anderen werden wir zukünftig als $x^3 + x^2 + x + 1$ sowie $-x^4 + 2x + 1$ schreiben. Der größte Exponent der Unbekannten, der in einem Polynom vorkommt, heißt **Grad des Polynoms**. Der Grad von $x^3 + x^2 + x + 1$ ist 3, der Grad von $-x^4 + 2x + 1$ ist 4 und der Grad von $-8x^{10} + 5x^6 - 2x^3 + x^2 + 4$ ist 10. Den Koeffizienten vor der höchsten Potenz der Unbekannten nennt man auch führenden Koeffizienten. Der führende Koeffizient von $x^3 + x^2 + x + 1$ ist 1, der führende Koeffizient von $-x^4 + 2x + 1$ ist -1 und der führende Koeffizient von $-8x^{10} + 5x^6 - 2x^3 + x^2 + 4$ ist -8.

Jede Reine Gleichung ist eine Algebraische Gleichung. Weitere Beispiele für algebraische Gleichungen sind $3x^2 + 4x - 1 = 5$ oder $-x^3 + 2x + 3 = 0$. Die letzte Gleichung zeigt eine Besonderheit: auf einer Seite der Gleichung steht die Zahl Null! Steht bei einer algebraischen Gleichung auf einer Seite der Gleichung die Zahl Null, sagt man, die Gleichung sei **in Normalform**.

Beispiele.

- $-5x^3 + 16{,}5x^2 - 6{,}1x - 5{,}4 = 0$ ist in Normalform.
- $6x^{10} + 3x = 5x^3 - 9x^2$ ist nicht in Normalform, kann aber durch Äquivalenzumformungen (zum Beispiel: „alles auf die linke Seite“) in Normalform gebracht werden: $6x^{10} - 5x^3 + 9x^2 + 3x = 0$.

Das kann man immer so machen: Jede algebraische Gleichung kann durch Äquivalenzumformungen in eine Gleichung umgeformt werden, die in Normalform ist. *Wenn wir algebraische Gleichungen lösen wollen, werden wir die Gleichung immer zuerst in Normalform bringen.* (Eine Ausnahme hiervon bilden die Reinen Gleichungen.)

Bei algebraischen Gleichungen in Normalform steht nur auf einer Seite ein Term, der die Unbekannte enthält. Den Grad dieses Polynoms nennt man auch den **Grad der Gleichung**.

Beispiele.

- $3x^2 + 5x - 1 = 0$ und $-4x^2 + 3x = 0$ sind algebraische Gleichungen vom Grad 2. Man nennt sie auch **quadratische Gleichungen**.
- $-5x^3 + 13{,}5x^2 - 6{,}1x + 2{,}6 = 0$ und $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ sind algebraische Gleichungen vom Grad 3. Manchmal werden sie **kubische Gleichungen** genannt.
- $-x^4 + 2x - 1 = 0$ und $-2x^4 + 12x^2 + 54 = 0$ sind algebraische Gleichungen vom Grad 4. Die zweite Gleichung $-2x^4 + 12x^2 + 54 = 0$ hat noch die Besonderheit, dass man sie aus einer quadratischen Gleichung durch Verdoppelung der Exponenten entstanden ist: Verdoppelt man in $-2x^2 + 12x + 54 = 0$ die Exponenten, erhält man die Gleichung $-2x^4 + 12x^2 + 54 = 0$. Diejenigen Gleichungen vierten Grades, die aus einer quadratischen Gleichung durch Verdoppelung der Exponenten entstanden sind, heißen auch **biquadratische Gleichungen**.

→ *Übung 7*

Auf der Mittelstufe haben Sie schon gelernt, wie man quadratische Gleichungen löst. Wir wollen dies kurz auffrischen.

7. Quadratische Gleichungen lösen

Zum Lösen quadratischer Gleichungen stehen verschiedenen Methoden zur Verfügung wie zum Beispiel die quadratische Ergänzung, die abc-Formel (auch „große Lösungsformel“) oder die p-q-Formel (auch „kleine Lösungsformel“). Letztere wollen wir hier behandeln.

Eine quadratische Gleichung in Normalform sieht so aus:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \text{ mit } a_2 \neq 0.$$

Um diese Gleichung zu lösen, sorgt man zunächst dafür, das der führende Koeffizient (also der Koeffizient von x^2) zu 1 wird, indem man durch den Koeffizienten von x^2 dividiert. Es entsteht eine Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0,$$

wobei p der Koeffizient von x und q der konstante Summand des Polynoms ist. Alle Lösungen der Gleichung erhält man dann aus der ***p*-*q*-Formel**

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Dabei ist:

- p der Koeffizient von x *mit Vorzeichen*.
- q der Summand der Gleichung, der keine Variable enthält, *mit Vorzeichen*.

Die Schreibweisen $x_{1/2}$ und $\pm\sqrt{\ldots}$ bedeuten, dass die Formel einmal mit $+$ und nochmal mit $-$ gerechnet werden muss.

Der Term $D = (p/2)^2 - q$, der in der *p*-*q*-Formel unter der Wurzel steht, heißt auch **Diskriminante** (lat. discriminare „unterscheiden“), weil man an ihm die Anzahl der Lösungen der Gleichung unterscheiden kann:

- $D < 0 \Rightarrow$ Die Gleichung hat keine (reelle) Lösung.
- $D = 0 \Rightarrow$ Die Gleichung hat genau eine Lösung.
- $D > 0 \Rightarrow$ Die Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen.

Beispiel. Es soll $-3x^2 - 11x + 46 = 4x - 26$ gelöst werden.

1. Die Gleichung wird in Normalform gebracht.	$-3x^2 - 11x + 46 = 4x - 26 \quad \vert -4x \quad \vert +26$ $-3x^2 - 15x + 72 = 0$
2. Durch den führenden Koeffizienten (also hier -3) wird geteilt.	$-3x^2 - 15x + 72 = 0 \quad \vert :(-3)$ $x^2 + 5x - 24 = 0$
3. p und q werden bestimmt.	$p = 5$, $q = -24$
4. Die p-q-Formel wird angewendet.	$x_{1/2} - \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-24)}$
5. Die Formel wird einmal mit $+$ und einmal mit $-$ gerechnet.	$x_1 = -2{,}5 + 5{,}5 = \underline{\underline{3}}$ $x_2 = -2{,}5 - 5{,}5 = \underline{\underline{-8}}$

→ *Übung 8*

8. Gleichungen vom Grad größer 2 lösen

Lösungen von linearen und quadratischen Gleichungen – also von algebraischen Gleichungen vom Grad 1 und 2 – können mit Hilfe mehr oder weniger einfacher Umformungen oder der p-q-Formel bestimmt werden. Sollte dies nicht auch für Gleichungen vom Grad 3 oder größer möglich sein: Gibt es geeignete Verallgemeinerungen zum Beispiel der p-q-Formel, mit denen für Gleichungen vom Grad 3, 4, 5 usw. die Lösungen jeder algebraischen Gleichung des jeweiligen Grades berechnet werden können? Diese Formeln sollten dann natürlich nur solche Rechenoperationen beinhalten, die in einem Polynom vorkommen können, bzw. die die Operationen, die in einem Polynom vorkommen können, umkehren. Damit sollte die gesuchte Lösungsformel neben den „arithmetischen“ Operationen $+, -, \cdot, \div$ nur Potenzieren und dessen Umkehrung, also Wurzelziehen, beinhalten.

In der Tat gibt es solche Lösungsformeln für die algebraischen Gleichungen vom Grad 3 und vom Grad 4. Sie sind jedoch sehr kompliziert.

Niels Henrik Abel

Das ist es dann aber auch! 1824 bewies der norwegische Mathematiker **Niels Henrik Abel** (geb. 5. August 1802, gestorben 6. April 1829) : Falls n größer als 4 ist, gibt es keine Formel, in der neben den Koeffizienten der Gleichung nur die arithmetischen Operationen $+, -, \cdot, \div$ sowie Potenzieren und Wurzelziehen vorkommt, mit deren Hilfe man für jede algebraische Gleichung vom Grad n sämtliche Lösungen dieser Gleichung berechnen kann.

Natürlich kann man für Spezialfälle Lösungsformeln angeben. Zum Beispiel kann man eine Lösungsformel für alle Gleichungen vom Grad 6 finden, die die Form

$a_6x^6 + a_3x^3 + a_0 = 0$ haben wie etwa $2x^6 - 18x^3 + 16 = 0$ (dies werden wir bald sehen). Aber es gibt keine Lösungsformel, die für *alle* Gleichungen vom Grad 6 funktioniert.

Immerhin liefert der Grad einer algebraischen Gleichung ein paar Informationen zu den Lösungen:

- Eine algebraische Gleichung vom Grad n hat *höchstens* n Lösungen.
- Ist der Grad ungerade (1, 3, 5, 7 usw.), so hat die Gleichung *mindestens* eine Lösung.
- Wenn der Grad gerade (2, 4, 6, 8 usw.) ist, kann es sein, dass die Gleichung keine Lösung hat. Wie wir wissen, haben quadratische Gleichungen (gerader Grad!) maximal zwei Lösungen, manche haben jedoch keine Lösung. → *Übung 9*

Wegen Abels Resultat werden wir für algebraische Gleichungen vom Grad größer als zwei *keine* Lösungsformeln behandeln! Stattdessen werden wir einige „Reduktionsmethoden“ kennenlernen, mit deren Hilfe man unter bestimmten Voraussetzungen das Lösen einer algebraischen Gleichung vom Grad n auf das Lösen einer oder mehrerer algebraischer Gleichungen zurückführt, deren Grad kleiner als n ist. Ein kleinerer Grad führt vielleicht dazu, dass nun die Lösungen gefunden werden können: Wird etwa eine Gleichung 3. oder 4. Grades auf eine oder mehrere quadratische Gleichungen „reduziert“, so können dann die Lösungen mit der p-q-Formel berechnet werden.

Solche Reduktionsmethoden, bei denen ein zu lösendes Problem auf ein einfacheres, womöglich bereits gelöstes Problem zurückgeführt wird, stellen auch allgemein eine wichtige Strategie zum Lösen mathematischer Probleme dar.

9. Die Substitutionsmethode

Betrachtet man die Gleichung $2x^6 - 18x^3 + 16 = 0$, so fällt auf, dass – ähnlich wie bei den biquadratischen Gleichungen – diese Gleichung aus eine quadratischen Gleichung entstanden ist, indem alle Exponenten mit dem Faktor 3 multipliziert wurden. Dies kann verwendet werden, um die Gleichung $2x^6 - 18x^3 + 16 = 0$ zu lösen:

Nach den Potenzregeln[1] ist $x^6 = x^{3\cdot 2} = \left(x^3\right)^2$, sodass man statt $2x^6 - 18x^3 + 16 = 0$ auch schreiben kann $2\left(x^3\right)^2 - 18x^3 + 16 = 0$. In dieser Gleichung kürzen wir die Schreibweise etwas ab und schreiben an Stelle von x^3 kurz eine neu gewählte Variable, zum Beispiel z hin, also $2z^2 - 18z + 16 = 0$, und merken uns im Hinterkopf, dass „in Wirklichkeit“ $z = x^2$ ist. Jetzt lösen wir zunächst die quadratische Gleichung $2z^2 - 18z + 16 = 0$:

[1] Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

$$
\begin{aligned}
2z^2-18z+16 &= 0 && \big| :2\\
z^2-9z+8 &= 0 && p=-9; q=8\\
z_{1/2} &= \frac{9}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-8}\\
z_1 &= 8\\
z_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Jetzt erinnern wir uns, dass z nur ein Platzhalter für x^3 ist. Die Lösungen $z=8$ sowie $z=1$ der „z-Gleichung" $2z^2-18z+16=0$ bedeuten also eigentlich $x^3=8$ sowie $x^3=1$. Indem wir abschließend diese beiden Gleichungen nach x auflösen, ergeben sich die Lösungen der Ausgangsgleichung $2x^6-18x^3+16=0$:

$$x^3=8 \,\big|\, \sqrt[3]{} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=2}}$$

$$x^3=1 \,\big|\, \sqrt[3]{} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=1}}$$

Dieses Substitutionsverfahren kann bei allen Gleichungen versucht werden, bei denen die Exponenten einen größten gemeinsamen Teiler t haben, der größer ist als 1. Im obigen Beispiel $2x^6-18x^3+16=0$ ist $t=3$. Bei der **Substitution** $z=x^t$ wird jeder Exponent durch t geteilt und als Unbekannte wird z statt x geschrieben. Es entsteht eine algebraische Gleichung, die einen kleineren Grad hat also die ursprüngliche. Wir wollen sie die **substituierte Gleichung** nennen.

Im günstigen Fall kann man die substituierte Gleichung lösen. Ansonsten hilft dieses Verfahren nicht weiter!

Kann man substituierte Gleichung lösen, so erhält man sämtliche Lösungen der ursprünglichen Gleichung, indem man für *jede* Lösungen z der substituierten Gleichung

- die Zahlen $\pm\sqrt[t]{z}$ berechnet, falls t gerade und $z\geq 0$ ist;
- die Zahl $\sqrt[t]{z}$ berechnet, falls t ungerade ist.

Dies nennt man **Resubstituieren**.

Beispiel 1. $x^4-6x^2-27=0$.

- Größter gemeinsamer Teiler der Exponenten: $t=2$.
- *Schritt 1.* Substitution $x^2=z$, indem alle Exponenten durch 2 geteilt werden und die Variable z statt x geschrieben wird: $x^4-6x^2-27=z^2-6z-27$.
  Zu lösen ist die Gleichung $z^2-6z-27=0$.
- *Schritt 2.* Lösen der quadratischen Gleichung $z^2-6z-27=0$ mit der p-q-Formel:
  $$z^2-6z-27=0 \Leftrightarrow z_{1/2}=-\frac{-6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-(-27)}=3\pm 6 \Leftrightarrow z_1=9; z_2=-3$$
- *Schritt 3.* Resubstitution: $z=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{z}$, falls $z\geq 0$ ist.
  Die Lösung $z=9$ der substituierten Gleichung führt auf die Lösungen $x=\pm\sqrt{9}\Rightarrow x=\pm 3$ der Ausgangsgleichung.

Die Lösung $z=-3$ der substituierten Gleichung führt auf keine Lösung der Ausgangsgleichung, das aus -3 keine Quadratwurzel gezogen werden kann.

- Resultat: Die Gleichung $x^4-6x^2-27=0$ hat die zwei Lösungen $x=3$ bzw. $x=-3$.

*Beispiel 2***.** $x^6-6x^3-27=0$.

- Größter gemeinsame Teiler der Exponenten: $t=3$.
- *Schritt 1.* Substitution $x^3=z$, indem alle Exponenten durch 3 geteilt werden und die Variable z statt x geschrieben wird: $x^6-6x^3-27=z^2-6z-27$
- *Schritt 2.* Lösen der quadratischen Gleichung $z^2-6z-27=0$ mit der p-q-Formel:
  $z_1=9; z_2=-3$ (siehe Beispiel 1)
- *Schritt 3.* Resubstitution: $z=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{z}$.
  Die Lösung $z=9$ der substituierten Gleichung führt auf die Lösung $z=9 \Rightarrow x=\sqrt[3]{9}\approx 2{,}08$
  ✓ $z=-3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-3}\approx -1{,}442$
- *Resultat:* Die Gleichung $x^6-6x^3-27=0$ hat die zwei Lösungen $x=2{,}08$ bzw. $x=-1{,}442$.

→ *Übung 10*

10. Die Nullteilerfreiheit als Lösungsverfahren

Dass für reelle Zahlen das **Prinzip der Nullteilerfreiheit** gilt, beschreibt folgende einfache Tatsache: Wenn ein Produkt reeller Zahlen Null ist, so muss mindestens einer der Faktoren des Produkts schon selber Null sein

Dies kann man zum Lösen algebraischer Gleichungen verwenden, die in Normalform sind, und deren Polynom ein Produkt von Polynomen ist, zum Beispiel $(x-5)(2x+7)(x^2-4)=0$. In diesem setzt man die einzelnen Faktoren (also hier $x-5$ sowie $2x+7$ und x^2-4) getrennt Null (also hier $x-5=0$ sowie $2x+7=0$ und $x^2-4=0$). Die Lösungen aller dieser Gleichungen zusammen sind alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung.

Beispiele.

1.

$$(x-5)(2x+7)(x^2-4)=0$$

$x-5=0 \mid +5$	$2x+7=0 \mid -7$	$x^2-4=0 \mid +4$
$\underline{\underline{x=5}}$	$2x=-7 \mid :2$	$x^2=4 \mid \sqrt{\ }$
	$\underline{\underline{x=3{,}5}}$	$\underline{\underline{x=\pm 2}}$

$(x-5)(2x+7)(x^2-4)=0$ hat also die Lösungen $x=5$, $x=3{,}5$, $x=-2$ und $x=2$.

2.

$$\left(x^2+6\right)\left(x^3+8\right)\left(x-3\right)^2=0$$

$x^2+6=0\,\big|-6$

$x^2=-6\Rightarrow$ keine Lösung

$x^3+8=0\,\big|-8$

$x^3=-8\,\big|\sqrt[3]{}$

$\underline{\underline{x=-2}}$

$\left(x-3\right)^2=0\,\big|\sqrt{}$

$x-3=0\,\big|+3$

$\underline{\underline{x=3}}$

$\left(x^2+6\right)\left(x^3+8\right)\left(x-3\right)^2=0$ hat also die Lösungen $x=-2$ und $x=3$.

3.

$$x\left(x^2+3x-18\right)=0$$

$\underline{\underline{x=0}}$

$x^2+3x-18=0 \quad p=3;q=-18$

$x_{1/2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+18}$

$\underline{\underline{x_1=3}};\ \underline{\underline{x_2=-6}}$

$x\left(x^2+3x-18\right)=0$ hat die Lösungen $x=0$, $x=3$ und $x=-6$.

→ *Übung 11*

Manchmal kann das Prinzip der Nullteilerfreiheit auch angewendet werden, wenn das Polynom der Gleichung kein Produkt ist. Dies ist dann der Fall, wenn das Polynom keinen konstanten Summanden hat, wenn also in jedem Summanden mindestens x in der ersten Potenz vorkommt wie zum Beispiel bei der Gleichung $-5x^6+20x^4=0$. In solchen Fällen ist es in der Regel am sinnvollsten, die kleinste Potenz von x auszuklammern (im Beispiel: x^4) und dann das Prinzip der Nullteilerfreiheit anzuwenden:

$$x^4\left(-5x^2+20\right)=0$$

$x^4=0\,\big|\sqrt[4]{}$

$\underline{\underline{x=0}}$

$-5x^2+20=0\,\big|-20$

$-5x^2=-20\,\big|:\left(-5\right)$

$x^2=4\,\big|\sqrt{}$

$\underline{\underline{x=\pm 2}}$

Beispiele.

1.

$$3x^2-12x=0$$

$$x\left(3x-12\right)=0$$

$\underline{\underline{x=0}}$

$3x-12=0\,\big|+12$

$3x=12\,\big|:3$

$\underline{\underline{x=4}}$

$3x^2-12x=0$ hat also die Lösungen $x=0$ und $x=4$.

2.

$$-0{,}3x^7+8{,}7x^5-30x^3=0$$
$$x^3\left(-0{,}3x^4+8{,}7x^2-30\right)=0$$

$x^3=0 \,\big|\, \sqrt[3]{\;}$

$\underline{\underline{x=0}}$

$-0{,}3x^4+8{,}7x^2-30=0$ Substitution $z=x^2$

$-0{,}3z^2+8{,}7z-30=0 \,\big|\, :(-0{,}3)$

$z^2-29z+100=0 \quad p=-29; q=100$

$z_{1/2}=\frac{29}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2-100}$

$z_1=25 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1/2}=\pm 5}}$

$z_2=4 \Rightarrow \underline{\underline{x_{3/4}=\pm 2}}$

$-0{,}3x^7+8{,}7x^5-30x^3=0$ hat also die Lösungen $x=0$, $x=-5$, $x=-2$, $x=2$ und $x=5$.

→ *Übung 12*

11. Polynomdivision

Hat die algebraische Gleichung keinen konstanten Summanden, kann Ausklammern beim Lösen der Gleichung helfen. Die Tatsache, dass die Gleichung keinen konstanten Summanden hat ist gleichbedeutend damit, dass Null eine Lösung der Gleichung ist. Nur dann ist also Ausklammern der Unbekannten eine Option beim Lösen der Gleichung.

Wenn dies nicht der Fall ist, kann man in manchen Fällen ein „verallgemeinertes Ausklammern“ anwenden, um die Gleichung zu vereinfachen. In diesem Fall muss man aber eine Lösung der Gleichung bereits kennen. Man kann dann den Term $\left(x-\text{"bekannte Lösung"}\right)$ „ausklammern“.

Zum Beispiel ist $x=1$ eine Lösung der Gleichung $-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4=0$. Dies findet man zum Beispiel durch Probieren heraus, indem man x probehalber mit verschiedenen Zahlen belegt und den Term berechnet. Kommt Null heraus, hat man eine Lösung gefunden.

Mit einem geeigneten Rechenverfahren – der Polynomdivision, die weiter unten dargestellt wird –, kann nun aus dem Polynom $-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4$ der Term $\left(x-1\right)$ „ausgeklammert“ werden. In der Tat ist

$$-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4=\left(x-1\right)\cdot\left(-5x^2+11{,}5x+5{,}4\right).$$

→ *Übung 13*

Man sagt: Der **Linearfaktor** $x-1$ wird **abgespalten**.

Hat man diese Darstellung gefunden, kann man mithilfe des Prinzips der Nullteilerfreiheit alle Lösungen finden:

$$-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4=0$$
$$(x-1)\cdot\left(-5x^2+11{,}5x+5{,}4\right)=0$$

$$x-1=0\,|+1$$
$$\underline{\underline{x=1}}$$

$$-5x^2+11{,}5x+5{,}4=0\,\Big|:(-5)$$
$$x^2-2{,}3x-1{,}08=0\quad p=-2{,}3;q=-1{,}08$$
$$x_{1/2}=\frac{2{,}3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2{,}3}{2}\right)^2+1{,}08}$$
$$\underline{\underline{x_1=2{,}7}};\underline{\underline{x_2=-0{,}4}}$$

Neben der bereits bekannten Lösung $x=1$ hat die Gleichung also noch die Lösungen $x=2{,}7$ sowie $x=-0{,}4$. (Natürlich kann man sich beim Rechnen das Nullsetzen des abgespaltenen Linearfaktors sparen.)

Wir müssen nun lernen, wie die Polynomdivision funktioniert. Das Vorgehen bei der Polynomdivision erinnert an das schriftliche Dividieren von Zahlen, das man auf der Grundschule gelernt hat:

	7	3	5	:	5	=	1	4	7
–	5	↓	↓						
	2	3	↓						
–	2	0	↓						
		3	5						
	–	3	5						
			0						

Bei der Polynomdivision müssen nun keine Zahlen sondern Polynome müssen dividiert werden: Um $x-1$ aus $-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4$ auszuklammern, muss das Polynom $-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4$ durch das Polynom $x-1$ dividiert werden:

$$\left(-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4\right):(x-1).$$

Folgende Schritte werden dazu durchgeführt:

Schritt 1. Teile $-5x^3$ durch x und schreibe das Resultat rechts auf:

$$(-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x\ \ -5{,}4):(x-1)=-5x^2$$

Schritt 2. Multipliziere das rechts hingeschriebene Divisionsergebnis mit $(x-1)$ und schreibe das Ergebnis unter die entsprechenden Terme des Polynoms:

$$\begin{array}{l}(-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x\ \ -5{,}4):(x-1)=-5x^2\\ -5x^3\ \ +5x^2\end{array}$$

Schritt 3. Subtrahiere die untere Zeile von der obersten.

$$\begin{array}{rrrrl}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1)=-5x^2\\
\underline{-(-5x^3} & \underline{+5x^2)} & & & \\
 & +11{,}5x^2 & & &
\end{array}$$

Schritt 4. Ziehe den nächsten Summanden herunter.

$$\begin{array}{rrrrl}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1)=-5x^2\\
\underline{-(-5x^3} & \underline{+5x^2)} & \downarrow & & \\
 & +11{,}5x^2 & -6{,}1x & &
\end{array}$$

Schritt 5. Teile $11{,}5x^2$ aus der letzten Zeile durch x und schreibe das Resultat ganz rechts auf:

$$\begin{array}{rrrrl}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1)=-5x^2+11{,}5x\\
\underline{-(-5x^3} & \underline{+5x^2)} & & & \\
 & +11{,}5x^2 & -6{,}1x & &
\end{array}$$

*Schritt 6***.** Multipliziere das ganz rechts aufgeschriebene Divisionsergebnis mit $(x-1)$ und schreibe das Ergebnis unter die entsprechenden Terme der letzten Zeile:

$$\begin{array}{rrrrl}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1)=-5x^2+11{,}5x\\
\underline{-(-5x^3} & \underline{+5x^2)} & & & \\
 & 11{,}5x^2 & -6{,}1x & & \\
 & 11{,}5x^2 & -11{,}5x & &
\end{array}$$

Schritt 7. Subtrahiere die untere Zeile von der darüber stehenden.

$$\begin{array}{rrrrl}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1)=-5x^2+11{,}5x\\
\underline{-(-5x^3} & \underline{+5x^2)} & & & \\
 & 11{,}5x^2 & -6{,}1x & & \\
 & \underline{-(11{,}5x^2} & \underline{-11{,}5x)} & & \\
 & & 5{,}4x & &
\end{array}$$

Schritt 8. Ziehe den nächsten Summanden herunter.

$$\begin{array}{rrrrl}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1)=-5x^2+11{,}5x\\
\underline{-(-5x^3} & \underline{+5x^2)} & & \downarrow & \\
 & 11{,}5x^2 & -6{,}1x & \downarrow & \\
 & \underline{-(11{,}5x^2} & \underline{-11{,}5x)} & \downarrow & \\
 & & 5{,}4x & -5{,}4 &
\end{array}$$

Schritt 9. Teile $5{,}4x$ aus der letzten Zeile durch x und schreibe das Resultat ganz rechts auf:

$$\begin{array}{rrrrl}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1)=-5x^2+11{,}5x+5{,}4\\
\underline{-(-5x^3} & \underline{+5x^2)} & & & \\
 & 11{,}5x^2 & -6{,}1x & & \\
 & \underline{-(11{,}5x^2} & \underline{-11{,}5x)} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \hline 5{,}4x & -5{,}4 \end{array}$$

Schritt 10. Multipliziere das ganz rechts aufgeschriebene Divisionsergebnis mit $(x-1)$ und schreibe das Resultat unter die entsprechenden Terme der letzten Zeile:

$$\begin{array}{lllll}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1) = -5x^2+11{,}5x+5{,}4 \\
-(-5x^3 & +5x^2) & & & \\
\hline
 & 11{,}5x^2 & -6{,}1x & & \\
 & -(11{,}5x^2 & -11{,}5x) & & \\
\hline
 & & 5{,}4x & -5{,}4 & \\
 & & 5{,}4x & -5{,}4 &
\end{array}$$

Schritt 11. Subtrahiere die untere Zeile von der darüber stehenden.

$$\begin{array}{lllll}
(-5x^3 & +16{,}5x^2 & -6{,}1x & -5{,}4) & :(x-1) = -5x^2+11{,}5x+5{,}4 \\
-(-5x^3 & +5x^2) & & & \\
\hline
 & 11{,}5x^2 & -6{,}1x & & \\
 & -(11{,}5x^2 & -11{,}5x) & & \\
\hline
 & & 5{,}4x & -5{,}4 & \\
 & & -(5{,}4x & -5{,}4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Ergebnis: $-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4=(x-1)\cdot\left(-5x^2+11{,}5x+5{,}4\right)$

Um eine Lösung zu erraten, die man dann in der Polynomdivision verwenden kann, wird man in der Regel ganze Zahlen ausprobieren und dabei in der Nähe von Null anfangen und hoffen, in absehbarer Zeit eine Lösung zu finden. (Dies ist nicht sichergestellt! Womöglich hat die Gleichung keine Lösungen oder dieses sind Kommazahlen, die man nicht alle ausprobieren kann.) Gott sei Dank gibt es einen Trick, mit dem man bei vielen Gleichungen die Menge der auszuprobierenden ganzen Zahlen eingrenzen kann: Man kann bestimmen, welche ganzen Zahlen überhaupt nur als Lösung in Frage kommen. Dieser Trick lautet:

Kommen im Polynom nur ganze Zahlen als Koeffizienten vor, so kommen als ganzzahlige Lösungen nur die Teiler des konstanten Summanden infrage.

Zum Beispiel kommen als ganzzahlige Lösungen von $2x^3-12x^2+24x-16=0$ nur die Teiler von -16 infrage, also ±1; ±2; ±4; ±8 und ±16. Da man diese Gleichung durch 2 teilen kann, wobei die Koeffizienten alle ganzzahlig bleiben, sieht man noch, dass weder 16 noch -16 eine Lösung sein kann, denn diese sind keine Teiler von -8, dem konstanten Summanden der durch 2 dividierten Gleichung, also $x^3-6x^2+12x-8=0$.

Ein letztes Beispiel hierzu: Die Koeffizienten der Gleichung $0{,}5x^3+3x^2-2x-12=0$ sind zwar nicht alle ganzzahlig, nach Multiplikation mit 2 entsteht aber die äquivalente Gleichung $x^3+6x^2-4x-24=0$, die die gleichen Nullstellen aber nur ganzzahlige Koeffizienten hat. Als ganzzahlige Lösung kommen nur die Teiler von -24 infrage, also ±1, ±2; ±3, ±4; ±6; ±8; ±12 und ±24.

→ *Übung 14*

Übungen zur Lerneinheit
Algebraische Gleichungen lösen – so gut es eben geht

Übung 1. Formulieren Sie in einem kurzen Text, was – nach Ihrem Verständnis aus der Mittelstufenmathematik – eine Gleichung ist und was man unter der „Lösung" einer Gleichung versteht.

Übung 2.

1. Belegen Sie die Unbekannten in den folgenden Termen mit den angegebenen Zahlen und berechnen Sie das Ergebnis.

	Term	w	x	y	z
a)	$w+2x-3y+4z$	-3	0	4	-5
b)	$4wz+x^2-2xy$	1	5	-3	-2
c)	$x^z+\sqrt[w]{y}$	3	-2	-8	5
d)	$\left(x^2+\frac{y}{x}\right)(wz+y)$	-4	3	27	5

2. Fassen Sie soweit möglich zusammen.

a)	$8a+5a+2b$	$8+14u+7v-7u+1$	$11+21r-3-12s-9r$
b)	$4x+5y+7x+9y$	$16a-13b-6a-7b$	$40r-10s+3s-3r$
c)	$4a^2+5a^2$	$7x^3-2x^3$	$9xy+6+2xy-3$
d)	$3x^2+9x^2+12y^2+5y^2$	$14xy+18rs-8xy-6rs$	$3ax-4by+2xa-yb$
e)	$6x^2y^2+2xy-2x^2y^2+3xy$	$6u^2v+2uv^2-3u^2v-uv^2$	$3a^2b+5ab^2-2a^2b+2ab^2$
f)	$-8x^2+4x^5+3x^2+6x^5$	$2a^2b-5ab^2+3a^2b^2+4a^2b$	$-4x^2+3y^2-2x^2+3$

3. Lösen Sie zuerst die Klammern auf und fassen Sie dann zusammen.
   - a) $75x-(18x-9y)-(3y-4x)$
   - b) $45a+(41a+39b)-(8b+52a)$
   - c) $72u-(26v-18u)-(56u-71v)$
   - d) $6{,}4a+(2{,}6b-3{,}8c)-(1{,}9b-5{,}3c+2{,}5a)$
   - e) $8{,}7x^2-(5{,}5y^2-1{,}3x^2)+(9{,}5y^2+7{,}6z^2)$
   - e) $(50u-69v)-(60v+37u)+(53u-9v)$
   - g) $(58r+83s)-(43r-37s)-(67s+100r)$
   - h) $\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{8}z\right)+\left(\frac{16}{5}x-\frac{2}{5}y\right)-\left(\frac{3}{4}x-\frac{31}{6}y\right)$
   - i) $(21{,}6a+17{,}9b)-(5{,}1c+9{,}7b)-(10{,}4a-11{,}1b-14{,}9c)$
   - j) $(8{,}5x+10{,}7y+21{,}4z)-(3{,}6x-(0{,}4y+9{,}7z))-(0{,}1x-(0{,}9y+3{,}1z))$
   - k) $(7{,}5r-(4{,}3s+9{,}1t))-(-5{,}2s+(3{,}8r-2{,}4t))+(-8{,}7t+1{,}9s-6{,}6r)$
   - l) $\left(\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}b-\frac{4}{5}c\right)+\left(\frac{1}{3}b-\left(\frac{5}{4}a-\frac{3}{5}c\right)\right)-\left(-\frac{1}{5}c-\left(\frac{5}{3}b+\frac{7}{4}a\right)\right)$

4. Fassen Sie soweit wie möglich zusammen.

a)	$9a+15(7a+5b)$	b)	$7(4x-9y)+10x$
c)	$3(7r+12s)-8s$	d)	$35x+6(3x-5y)$
e)	$7x^2+3x(2x-5y)$	f)	$2a(4b+6c)-3ab$
g)	$9u(6v-5u)+8u^2$	h)	$5z^2+4(7y+2z^2)$
i)	$6(a+b)+4(a-b)$	j)	$15(x+y)+12(y-x)$
k)	$a(b-c)+b(3-a)$	l)	$x(y+z)+x(y-z)$
m)	$x(4a-6)+4x(6-a)$	n)	$5x(8y+11z)+4y(9x-5z)$
o)	$8u(2v+3w)+(7v-3w)\cdot 4u$	p)	$7(5a^2+3b^2)+8a(4a-5b)$
q)	$3a(7x-5)+2a(4-3x)$	r)	$6a(13b-18c)+7b(11a+14c)$
s)	$7a(3b-8c)+(4c-9b)\cdot 11a$	t)	$6x(4x-5x^2)+8(7x^2-9x)$

5. Lösen Sie erst die Klammern auf und fassen Sie dann zusammen.

a)	$(a-4)(a+5)$	b)	$(y+7)(y-6)$
c)	$(10-x)(7+x)$	d)	$(a+3b)(a+b)$
e)	$(4u+5v)(3u-9v)$	f)	$(7a-3b)(4a-6b)$
g)	$(-x-2y)(-x+y)$	h)	$(3y+7z)(5z+4y)$
i)	$(4a+5b)(9a-3b)$	j)	$(6u-7v)(4u+3v)$
k)	$(8x-4y)(11x-12y)$	l)	$(3r+4s)(5r+2s-3t)$
m)	$(7a-3b-6c)(4b-3a)$	n)	$(6u-2v-5w)(2u-v+w)$
o)	$(-2x+5y+2z)(5x-2z+3y)$	p)	$(8a^2+3b)(5a^2-11b)$
q)	$(6x^2-8y)(7x^2-9y)$	r)	$(9u^2-7v^2)(5u^2+8v^2)$
s)	$(15r^2+11s^2)(7r^2+8s^2)$	t)	$\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{5}b^2-\frac{5}{6}a^2\right)$
u)	$(7x^2-4y)(5x+8y^2)$	v)	$(4r^2+2s^2)(9r-6s)$
w)	$(3a^3-7b)(5b^2-4a)$	x)	$(3x^2-4y)(3y^2-9x^3)$
y)	$(u(3+2v)-2v)(3u+4v)$	z)	$(6r^2-2s(3s+t))(r(4r-s)-5t)$

6. Vereinfachen Sie die folgenden Terme, indem Sie ggf. vorhandene Klammern auflösen und so weit wie möglich zusammenfassen.

a)	$11+21r-3-12s-9r$	b)	$14xy+18rs-8xy-6rs$	c)	$6xyz+2xy-2zxy+3wxy$
d)	$75x-(18x-9)$	e)	$(50u-65v)-(60v+35u)+(55u-10v)$		
f)	$7xy+3x(2-5y)$	g)	$2a(4b+6c)-3ab$	h)	$a(b-c)+b(3-a)$
i)	$(a-4)(b+5)$	j)	$(4a+5b)(9x-3y)$	k)	$(8x-4y)(10a-15b)$

7. Vereinfachen Sie mithilfe der binomischen Formeln

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

a) $(4x+3)^2$ b) $(2x-5)^2$ c) $(3x-4y)^2$ d) $(6x+5y)\cdot(6x-5y)$

8. Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus.

a) $6a-6b$ b) $0{,}5x+0{,}5y$ c) $5au-5aw$

d) $rs-rt$ e) $21a-14b$ f) $30uv-10uw$

g) $6xy-3xz$ h) $7ab^2-b^2$ i) $5x+5y+5$

j) $3ar+3as+9at$ k) $3x-18y+3$ l) $12xy^2+4x^2y-16xy$

9. Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus.

Beispiel: $2a(x-y)+3b(x-y)=(x-y)\cdot(2a+3b)$

a) $5(7x-3y)+3a(7x-3y)$ b) $6r(u-3)-4s(u-3)$

c) $2x(x-2)-x^2(x-2)$ d) $2a(2a+3b)-4c(2a+3b)$

e) $5x^2(u+2v)+15x(2u+4v)$ f) $a(2a+b)-3ab(2a+3b)$

g) $12x^2(x-y)-2xy(x-y)$ h) $r^2(-2y+z)+3s^2(-2y+z)$

i) $3t(3a-5b)+7t^2(3a-5b)$ j) $6x^2(3u+4v)-3xy^2(9u+12v)$

k) $3(x-4)-(x-4)^2$ l) $(a+b)^3-(a+b)^2$

m) $x^2(x-y)+y^2(y-x)$ n) $5w^2(u^2-v^2)+(u^2-v^2)^2$

Übung 3.

1. Belegen Sie Unbekannten in den folgenden Gleichungen mit den angegebenen Zahlen, und entscheiden Sie, ob die entstehende Gleichung wahr oder falsch ist.

	Gleichung	w	x	y	z
a)	$2x+1=9$	-1	8	7	0
b)	$5x-6y=3z+w$	5	-1	3	3
c)	$3^x+5w=4y-z$	-4	2	3	-1
d)	$6x^2-4w+2y=2z+3w$	2	-1	3	-1

2. Entscheiden Sie, ob die angegebene Belegung der Unbekannten mit Zahlen eine Lösung der Gleichung darstellt.

	Gleichung	w	x	y	z
a)	$5x^3+6y^2+w=x^2+10z+3^z$	3	-2	-3	1
b)	$x+y+z=w+2\cdot(x+y+z)$	-9	8	5	-4
c)	$5(x+w)^3=-6y^2+3z-w$	0	-3	-4	-13
d)	$w+(x+1)^2=5^y+2z$	25	125	2,5	$-0{,}5$

Übung 4.

1. Stellen Sie die Ihnen aus der Mittelstufe bekannten Äquivalenzumformungen von Gleichungen zusammen.
2. Entscheiden Sie, ob das Ziehen der Quadratwurzel (zum Beispiel um die Gleichung $x^2=4$ zu lösen) eine Äquivalenzumformung ist.

Übung 5.

1. Lösen Sie die Gleichungen.

a) $12x-(4-3x)=7x-(6-2x)+26$

b) $(5x+3)-13=10x-(27+4x)+7$

c) $54-(18-4x)=36-(2x-15)$

d) $(20x-15)-(6x+13)=(9x+37)-(5x-5)$

e) $18x+31-(11x+11)=(6x-4)-(8-5x)$

f) $9x-20-(61-13x)=17x+57-(14x-71)$

g) $3(x+1)+x+5=-(x-10)+2x+4$

h) $2x+3(2x+5)-2=3(-3+x)-8+2x$

i) $6(x-6)+24x+4=2(4x+15)-4x+24$

j) $30x-13-2(17-3x)=2(4{,}5x-26)+21-3$

k) $7(16x-25)-6(7x+5)=27x+22-4(x-2)$

l) $5(13-31x)-3(40x+100)=1-9x+2(17+2x)$

m) $18(2x+12)+12(6-7x)=10(44-2x)-7(x+13)+2$

2. Auch bei den folgenden Gleichungen handelt es sich um lineare Gleichungen, jedoch wird dies erst während der Äquivalenzumformungen deutlich.

a) $(6x-4)(x+2)=2(11x-19)+2(3x^2-13)$

b) $(x+3)(8x-6)=2(x+8)(4x+2)-150$

c) $4x^2-93-(1-9x)-(3-8x)=2(2x+1)(x-1)$

d) $(x-2)(x-1)+2x^2=(3x-1)(x+1)-12$

e) $45+(x-3)(x+1)=3(x-4)(x+2)-2(x-3)(x-5)$

f) $5(2x-3)(10-x)-2(x+2)(x-1)-72=3(2+x)+7(2x+4)-12x^2+36$

g) $2x+4x(2x-10)+6(x-3)=2(x-2)(4x-11)-20$

h) $-(-x^2+3x-1)+(x^2+x+2)=3(x+1)+2x^2-6x+4$

i) $x(x+3)+2(x+1)+x^2=4x+2x(x+1)-1$

j) $(2x+1)(1-x)+\left(\frac{1}{2}x-1\right)+5x^2=(x+1)(3x-2)+\frac{3}{2}x^2-1$

k) $\frac{1}{2}\left[x-2+x(1+2x)\right]+(x+2)(x+1)=2x^2+3(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)$

l) $10(3x+4)(x-8)+9x-98=2(5x-40)(3x-7)+10x+3$

m) $(x-3)(2x-6)+x^2=(7-x)(19-2x)+7(28-3x)+x^2-59$

n) $(5-2x)(15-5x)+4(7x+6)+2x+6=2x(5x+5)+20x-5$

o) $(4x+1)(2x-1)-(2x+1)(3x-2)=2(4-x)(5-x)+3(x+1)$

p) $2(5x-4)(7-5x)+(7x-6)(2x+2)-3x^2=(9-x)(2-x)-40x^2+37$

r) $3(2x-18)(1-x)-2(12-2x)(x-8)+x^2-1=(12-x)(x-7)+2(2x+4)+4$

3. Die Terme in den folgenden Gleichungen können mithilfe der binomischen Formeln vereinfacht werden. Formt man dann weiter äquivalent um, erkennt man, dass es sich auch hier um lineare Gleichungen handelt.

a) $(x+1)^2+x=(x+2)^2-6$

b) $(10-x)^2-8x=(9-x)^2+7$

c) $2x+(x+5)^2-1=(x+4)^2+8x$

d) $4(x+7)+(x-3)^2=(x+2)^2-2x+1$

e) $2x+(9-x)^2-1=(12-x)^2-2x-4$

f) $(2x-5)^2-(x-1)^2+11=3(x-2)^2-x-2$

g) $(15-3x)^2+2(2x+3)+2x+1=9(6-x)^2+4$

h) $3(x-1)+(x+1)(x-1)+1=(x+1)^2-2$

i) $(x+1)^2+2(x-3)+1=(x+1)(x-1)+2(x+2)-6$

j) $16x+(x-1)^2+10(10-2x)^2+1=(x-2)^2+2(x-4)^2+2x^2$

k) $(x+2)^2-3(3x-7)+x=(18-x)^2-2(x-1)+5$

l) $(x+4)(x-4)+(x-4)^2=(x+5)(x-5)-2(2x-6)+x^2-15$

m) $(8-3x)^2-(3x+2)^2+6(2x+5)+5x=2(5x+3)+2(x+3)-15x-2$

n) $5(3x+10)-(5+4x)(5-4x)-(2x+3)(8x-2)+20=(x+1)^2-x^2-2x$

o) $(12-8x)(2x+8)+4(2x+3)^2-8(x+9)=10(3-x)(3+x)-5(2x+1)+10x^2-15$

Übung 6.

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf.

a) $3x^2+7=22$	b) $7x^2-12=30$	c) $85-15x^2=40$
d) $7-4x^2=55$	e) $12-x^3=13$	f) $6x^4+1=10$
g) $-3x^3+29=8$	h) $12x^2-10=-24$	i) $3x^3-8=-23$
j) $-2x^3+4=0$	k) $-22x^5-44=154$	l) $33-x^2=32$
m) $0,5x^3+3,5=4$	n) $7x^2+43=39,5$	o) $1,5x^4-12,7=-5,2$

2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf.

a) $36-(7x^2+8)=6x^2+2$	b) $7x^3-(16-3x^3)=9x^3-13$
c) $54-(7-5x^3)=8x^3+8$	d) $-(11x^4-25)-4=9x^4+1$
e) $(x^5+55)-30=7x^5-5$	f) $75-6x^2=(22-2x^2)+23$
g) $12x^2+27=11+(187-7x^2)$	h) $3x^3-(36+4x^3)=28-2x^3$
i) $11+5x^2=3x^2-(10-5x^2)$	j) $127+3x^3=38-(16+32x^3)$
k) $22,5-9x^3=17,5-(10x^3-7,5)$	l) $35x^6-410=110-(12x^6-18)$

Übung 7. Untersuchen Sie, ob die folgenden Gleichungen algebraisch sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grad.

a) $-x^4+3x-1=0$	b) $7,5x^3+2x^2-5x+3,8=0$
c) $x+\sin(x)=0$	d) $x^5-4x^2=0$
e) $4x-2x^{-3}=0$	f) $2^x-1=0$
g) $x^{10}-9=0$	h) $2-5x^7-3,75x^4+3x-x^9=0$
i) $5x^{13}-7x^5-3x+8=6x^7+2$	j) $-3,2x^6+1,5x^2-0,8=-3,2x^6+4,6x^4-2x$

Übung 8. Berechnen Sie jeweils alle Lösungen der quadratischen Gleichungen.

1. a) $x^2+6x+5=0$ b) $x^2+10x-11=0$ c) $-x^2+9x-18=0$
   d) $-x^2+5x-6=0$ e) $3x^2+12x+12=0$ f) $-2x^2+4x-5=0$
   g) $5x^2+20x+2=0$ h) $x^2-36=0$ i) $-4x^2+24x-20=0$
   j) $-2x^2+20=6x$ k) $4x^2=9x+9$ l) $10x-2x^2=12$
   m) $20-x^2=8x$ n) $18-x^2=9x$ o) $6x+8=2x^2$

2. a) $3x^2+8x=15-2x^2-2x$ b) $x^2-3x=5x^2+3x+2$ c) $-2x^2+3x-2=2x^2-3x$
   d) $x^2+2x-4=8-x^2$ e) $4x^2+x=14-3x^2-6x$ f) $x^2+5x+1=-3x^2-x-1$
   g) $3x^2+7x=12-2x$ h) $2x^2-7x-9=2x+2$ i) $3x^2-4x-1=2x-x^2-x+3$

3. a) $-\left(x^2+8x\right)=12$ b) $-x^2+4\left(x-1\right)=0$ c) $x\left(4x-1\right)=14$
   d) $15=5\left(x^2+2x\right)$ e) $2\left(x^2-5\right)=x$ f) $4x\left(2-x\right)=4$
   g) $-3\left(3x+6\right)=x^2$ h) $2x\left(x+1\right)+x=1-2x^2$ i) $x\left(2-3x\right)+1=2\left(x^2-1\right)$
   j) $5x\left(x+5\right)+3=5x-3\left(x^2+3\right)$ k) $x\left(x+1\right)+5\left(x+1\right)=0$ l) $x\left(2x+1\right)=2\left(7-x^2\right)$
   m) $x\left(4x+7\right)-8=x^2+10\left(x+1\right)$ n) $x\left(x+2\right)-10=3x+2$ o) $3x\left(2x+1\right)=5x\left(x+2\right)$

4. a) $\left(x+4\right)^2+3\left(x+1\right)+9=0$ b) $2\left(2x+1\right)+\left(x+1\right)^2=-3$
   c) $\left(4x-4\right)^2-2\left(x-1\right)^2=0$ d) $\left(x+4\right)^2+7\left(5-x\right)=63$
   e) $\left(2x+1\right)^2+6\left(x+2\right)=2\left(x+5\right)$ f) $\left(3x-5\right)^2+7=8\left(3x-5\right)$
   g) $\left(x-1\right)^2+\left(x+2\right)^2=7x+3$ h) $\left(x-3\right)^2+2x\left(x-4\right)=3x-5$
   i) $-3\left(x-1\right)^2+\left(5-3x\right)^2=3x+1$ j) $\left(x+1\right)\left(x-1\right)+\left(x-4\right)^2=x^2$
   k) $\left(3-x\right)\left(3+x\right)+\left(x+5\right)^2=6\left(x^2+2x+1\right)$ l) $x^2+\left(x-6\right)^2=\left(x+1\right)^2-5$
   m) $2x^2+\left(x+2\right)^2=\left(x+3\right)^2+7$ n) $\left(2x-2\right)^2+x^2=\left(x+1\right)^2-1$
   o) $\left(x+2\right)^2+\left(x+5\right)\left(x-5\right)=5\left(2x+3\right)$ p) $\left(3x-2\right)^2-\left(2x-1\right)\left(2x+1\right)=2\left(3x+14\right)$

Übung 9. Treffen Sie aufgrund der im Text genannten Informationen Aussagen über die Anzahl der Lösungen der folgenden algebraischen Gleichungen.

a) $-7{,}5x^3+2x^2+2=0$ b) $6x^5-4x^4+3x^2-9=0$
c) $-3x^6+2{,}5x^5+4x-1=0$ d) $x^{10}+5x^2-6x-0{,}5=0$
e) $6{,}2x^4+3{,}8x^2-9{,}5=-4{,}6x$ f) $7{,}1x^9+6x^5-3=4x^3+5{,}6x^2$
g) $31{,}7x^{13}-7x=0{,}01x^4+2{,}8$ h) $5x^4-8{,}4x^3+12{,}3x=9+24{,}2x^2+5x^4$
i) $5x^{13}-7x^5-3x+8=6x^7+2$ j) $-3{,}2x^6+1{,}5x^2-0{,}8=-3{,}2x^6+4{,}6x^4-2x$

Übung 10.

1. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden algebraischen Gleichungen vierten Grades.
   a) $0=x^4-5x^2+4$ b) $0=x^4+3x^2-10$
   c) $0=2x^4-14x^2+24$ d) $0=-0{,}5x^4+2x^2+6$
   e) $0=x^4-3x^2+2{,}5$ f) $0=0{,}2x^4-x^2-1{,}2$
   g) $0=-2x^4+17x^2-28{,}125$ h) $0=3x^4-26{,}75x^2-6{,}75$
   i) $0=3x^4+47{,}25x^2-12$ j) $0=-5x^4+3{,}25x^2-0{,}392$

k) $0=-4x^4-183{,}75x^2-4624$ l) $0=0{,}8x^4-10{,}512x^2+19{,}602$

2. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden algebraischen Gleichungen.
   a) $0=0{,}5x^6+9{,}5x^3-108$ b) $0=-0{,}3x^6-18{,}9x^3+19{,}2$
   c) $0=-4x^8+68x^4-64$ d) $0=-0{,}1x^4-3{,}4x^2-22{,}5$
   e) $0=0{,}01x^6+1{,}33x^3+10$ f) $0=0{,}1x^{10}-3{,}3x^5+3{,}2$
   g) $0=-0{,}02x^6-3{,}78x^3-160$ h) $0=0{,}1x^{12}-72{,}8x^6-72{,}9$
   i) $0=-0{,}01x^8+6{,}26x^4-6{,}25$ j) $0=-1{,}5x^4-8{,}25x^2-11{,}25$

Übung 11.

1. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden algebraischen Gleichungen.
   a) $(x-7)(x-4)(x+9)=0$ b) $3(x+0{,}5)(x-2)=0$
   c) $0{,}2(x+1{,}2)(x^2-25)=0$ d) $(x^2-6x+9)x^2=0$
   e) $x^2(x^3+64)=0$ f) $(x-5)(x^2+12x+36)=0$
2. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden algebraischen Gleichungen.
   a) $(2x^2+6x-20)(x-4)(x^2-100)=0$
   b) $(-3x^2-4{,}5x+30)(2{,}5x^2-4{,}5x-19)=0$
   c) $(4x^2-x-0{,}5)(x-3)^2=0$
   d) $(0{,}5x^2+1{,}875x+1{,}75)(2x^4+8{,}32x^2-87{,}12)=0$
   e) $(5x^3+40)\cdot(x^4+1)\cdot(-2x^2-8x+10)=0$

Übung 12.

1. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen durch Ausklammern und Anwenden der Nullteilerfreiheit.
   a) $x^2+8x=0$ b) $x^2-2x=0$ c) $4x^2-12x=0$
   d) $3x^2+6x=0$ e) $7x^2-28x=0$ f) $15x^2+30x=0$
   g) $6x^2=9x$ h) $20x=5x^2$ i) $7x(x-3)=6x^2-7x$
   j) $3x^2-9x=7x-x^2$ k) $3x(x+2)=9x-2x^2$ l) $-x^2-7x=0$
2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen.
   a) $2x^4-54x=0$
   b) $-0{,}5x^5+12{,}5x^3-72x=0$
   c) $0{,}25x^8-4x^5+16x^2=0$
   d) $-0{,}75x^7+3x^4+11x=-2{,}25x^4+5x$
   e) $x^6=174{,}24x^2+24{,}49x^4$
   f) $(x^2-16)(1{,}5x^4-2{,}25x^3-20{,}25x^2)=0$
   g) $(x^2+2x)(2x^5+22{,}5x^3-365{,}5x)=0$
   h) $(5x^4+40x)\cdot(x^4+1)\cdot(-2x^4-8x^3+10x^2)=0$

Übung 13. Weisen Sie nach, dass $-5x^3+16{,}5x^2-6{,}1x-5{,}4=(x-1)\cdot(-5x^2+11{,}5x+5{,}4)$ ist, indem Sie den Term auf der rechten Seite ausmultiplizieren.

Übung 14.

1. Führen Sie die Polynomdivision durch.

   a) $\left(x^3-4x^2-16x+15\right):\left(x+3\right)$ b) $\left(3x^3-11x^2-13x+36\right):\left(x-4\right)$

   c) $\left(2x^3-3x^2-12x-5\right):\left(x+0,5\right)$ d) $\left(x^3-x+120\right):\left(x+5\right)$

2. Prüfen Sie, welche der Zahlen $-5;-2;+3;7;10$ die algebraische Gleichung lösen. Spalten Sie dann den entsprechenden Linearfaktor ab und bestimmen Sie die restlichen Lösungen.

   a) $4x^3+2x^2+5x-1505=0$ b) $0,5x^3+3x^2-2x-12=0$

3. Ermitteln Sie eine Lösung der algebraischen Gleichung, spalten Sie den entsprechenden Linearfaktor ab und bestimmen Sie alle weiteren Lösungen.

   a) $x^3-x^2-22x+40=0$ b) $6x^3+19x^2+2x-3=0$

   c) $4x^3-2x^2+x-0,5=0$ d) $2x^3-12x^2+24x-16=0$

4. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden algebraischen Gleichungen.

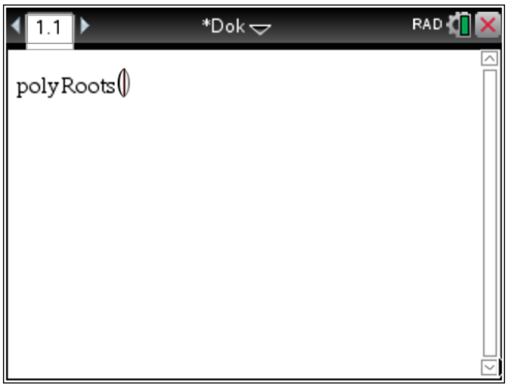
   a) $x^4+x^3-0,75x^2-x-0,25=0$ b) $4x^4+x^3-11,5x^2-11,5x-3=0$

   c) $-2x^4+12x^3-26,5x^2+25,5x-9=0$ d) $x^4-2x^3-x+2=0$

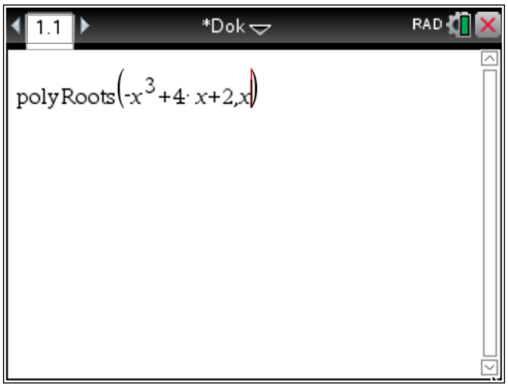
So geht's mit dem GTR: Lösen von algebraischen Gleichungen

Wenn wir die Lösungen der Gleichung $-x^3+4x+2=0$ berechnet wollen, versagen alle vorgestellten Verfahren. In diesem Fall (und nur in diesem) soll die Lösung direkt vom GTR berechnet werden. Dazu geht man wie folgt vor:

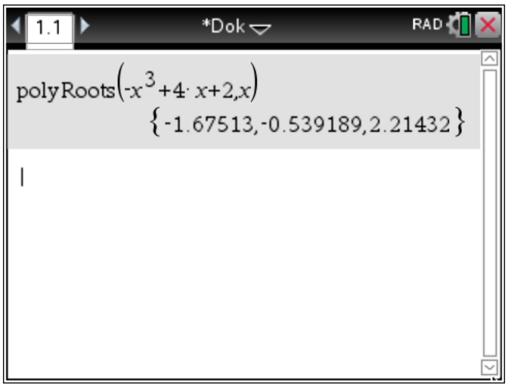
menu 3 3 2 eingeben: Die polyRoots-Funktion wird ohne Argumente aufgerufen. (Sie können die Funktion auch direkt über die Buchstabentasten eintippen.)



Eingeben des Polynoms. Durch das ‚x wird angedeutet, dass die Gleichung nach x aufgelöst werden soll.



enter eingeben: TI Nspire CX berechnet die drei Lösungen, die durch Kommata getrennt angegeben werden.



Üben mit dem GTR: *Lösen von algebraischen Gleichungen*

Übung 1. Bestimmen Sie mit dem GTR alle Lösungen der folgenden algebraischen Gleichungen.

a) $x^3 + 3,7x^2 - 6x - 21 = 0$

b) $x^3 - 13x^2 + 49,31x - 44,33 = 0$

c) $-2x^3 - 12,8x^2 + 20,7x + 140 = 0$

d) $x^4 - 10x + 16 = 0$

d) $x^5 + 0,5x^4 - 7x^3 - 3,5x^2 + 10x + 5 = 0$

e) $5x^6 + 4x^5 + 4x^2 + 10x + 3 = 0$