
Mehrstufige Prozesse und Matrizenmultiplikation

---

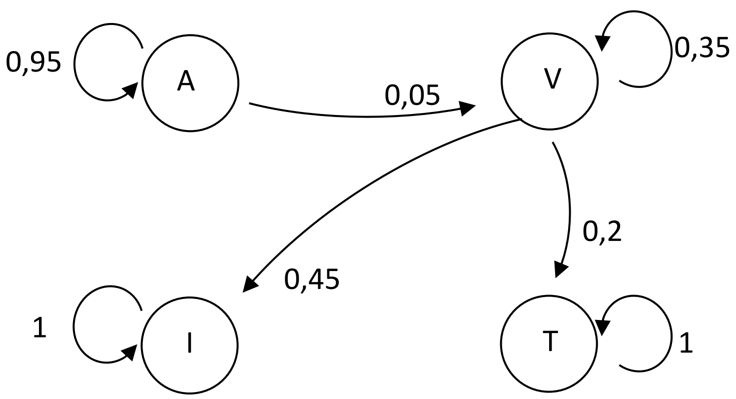
1. Ziele der Lerneinheit

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie,

- wie man Matrizen multipliziert.
- wie man *n*-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet und was sie bedeuten.
- wie man untersucht, wie sich ein mehrstufiger Prozess asymptotisch (also über einen langen Zeitraum gesehen) verhält.
- wie man den GTR in der Matrizenrechnung verwenden kann.
- weitere Rechenoperationen im Bereich der Matrizen kennen.

2. Nochmals die Pandemie-Simulation

Durch den folgenden Gozintographen simulieren Mathematiker eines Think Tanks eine durch einen Virus hervorgerufene Pandemie in einer Population von Menschen,



wobei die Zustände die Ansteckbaren (A), die mit dem Virus infizierten (V), die Immunen (I) und die Toten (T) kennzeichnen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten beziehen sich dabei auf den Zeitraum von einem Tag.

In einer ersten Simulation gingen die Wissenschaftler außerdem von der Startverteilung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix}$$

aus.

Die Mathematiker wenden sich nun der Frage zu, wie die Übergangswahrscheinlichkeiten für einen Zeitraum von 2, 3 oder mehr Tagen aussehen. Insbesondere interessiert sie auch, welche Auswirkungen die Pandemie nach einem noch längeren Zeitraum (zum Beispiel ein Jahr) haben wird.

3. Mehrschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

Um die Übergangswahrscheinlichkeiten für einen Zeitraum von 2 Tagen zu bestimmen, überlegen die Mathematiker folgendes: Um die Verteilung der Population auf die Zustände nach zwei Tagen zu bekommen, wird zunächst die Verteilung nach einem Tag berechnet, also

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix}.$$

Wird dann diese neue Verteilung erneut mit der Übergangsmatrix multipliziert, ergibt sich die Verteilung $\vec{z}$ nach einem weiteren, also insgesamt nach zwei Tagen:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix}}_{=\vec{y}}$$

Eine Matrix M_2, die die Übergangswahrscheinlichkeiten nach 2 Tagen beinhaltet, müsste dann die Gleichung

$$M_2 \cdot \begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix}$$

erfüllen, mit anderen Worten: es müsste

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei zwei Matrizen miteinander multipliziert werden.

In der Tat kann man ein Produkt von Matrizen so definieren, dass das Produkt der beiden Übergangsmatrizen eine Übergangsmatrix ist, deren Einträge die Übergangswahrscheinlichkeiten für den Übergang von einem Zustand in einen weiteren Zustand *nach zwei Übergängen* angeben.

Definition. (Matrizenmultiplikation)

Vorgegeben sind zwei Matrizen M und N, wobei die Anzahl s der Spalten von M der Anzahl der Zeilen von N entspricht.

N besteht aus einer gewissen Anzahl Spalten. Diese Spalten können wir als Vektoren auffassen – man nennt sie auch die **Spaltenvektoren**. Dann können wir N in der Form

$$N=\begin{pmatrix}\vec{n}_1 & \vec{n}_2 & \vec{n}_3 & \dots & \vec{n}_s\end{pmatrix}$$

schreiben, wobei $\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3,\dots,\vec{n}_s$ die Spaltenvektoren von N sind. Das Produkt $M\cdot N$ der beiden Matrizen erhält man, indem man innerhalb der Matrix N alle Spaltenvektoren mit der Matrix M multipliziert:

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}M\cdot\vec{n}_1 & M\cdot\vec{n}_2 & M\cdot\vec{n}_3 & \dots & M\cdot\vec{n}_s\end{pmatrix}.$$

Ist $M=N$, schreibt man auch manchmal M^2 statt $M\cdot M$ sowie M^3 statt $M\cdot M\cdot M$ und so weiter. Man spricht in diesem Fall von der zweiten, dritten, … Potenz der Matrix M.

Wir erläutern die Matrizenmultiplikation am Beispiel

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0{,}95 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{M}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0{,}95 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{N}$$

Die Spaltenvektoren von N sind hier $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}0{,}95\\0{,}05\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}0\\0{,}35\\0{,}45\\0{,}2\end{pmatrix}$, $\vec{n}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ sowie $\vec{n}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. Um die Spaltenvektoren der Produktmatrix $M\cdot N$ zu bekommen, müssen diese Spaltenvektoren innerhalb von B jeweils mit der Matrix A multipliziert werden:

→ *Übung 1*

$$M\cdot N = \begin{pmatrix} M\cdot\begin{pmatrix}0{,}95\\0{,}05\\0\\0\end{pmatrix} & M\cdot\begin{pmatrix}0\\0{,}35\\0{,}45\\0{,}2\end{pmatrix} & M\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} & M\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0{,}9025\\0{,}0651\\0{,}0225\\0{,}01\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0{,}1225\\0{,}6075\\0{,}27\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}9025 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}0651 & 0{,}1225 & 0 & 0\\ 0{,}0225 & 0{,}6075 & 1 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}27 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Die Zahlen im Produkt sind die **Zweischritt-Übergangswahrscheinlichkeiten**:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{in 2 Schritten / in 2 Tagen} \\ & & \text{von} \\ & & \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{V} & \text{I} & \text{T}\end{array} \\ \text{nach} & \begin{array}{c}\text{A}\\ \text{V}\\ \text{I}\\ \text{T}\end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}9025 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}0651 & 0{,}1225 & 0 & 0\\ 0{,}0225 & 0{,}6075 & 1 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}27 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

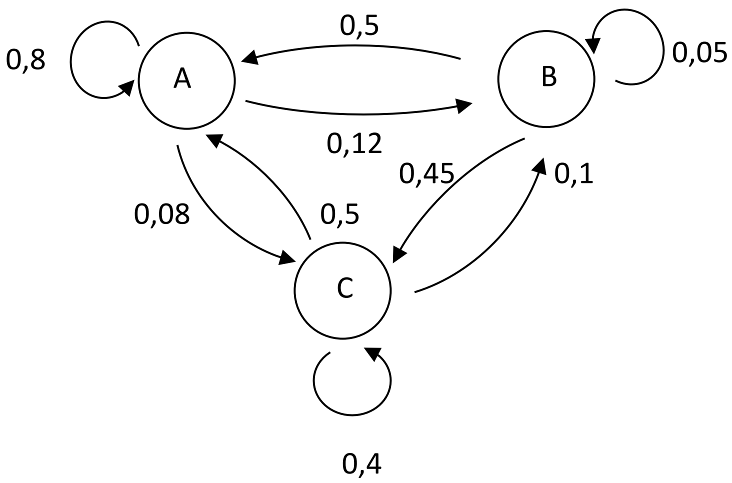
Zum Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein anfänglich Ansteckbarer nach 2 Tagen immun ist 2,25 % und dass ein anfänglich Ansteckbarer nach 2 Tagen gestorben ist 1 %.

Wir fassen zusammen:

Satz. (Modellieren mehrstufiger Prozesse durch Matrizen und Vektoren)
Ist die Verteilung von Objekten auf verschiedene Zustände durch einen Verteilungsvektor $\vec{x}$ festgelegt und sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen durch eine Übergangsmatrix M gegeben, so erhält man den Verteilungsvektor $\vec{x}_n$ für die Verteilung der Objekte nach n Übergängen , indem man die n-te Potenz der Übergangsmatrix M mit dem Startvektor $\vec{x}$ multipliziert: $\vec{x}_n = M^n \cdot \vec{x}$.
Die Einträge der Matrix M^n sind die ***n*-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten**. Sie geben an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, in n Schritten von einem anderen Zustand in einen anderen oder denselben Zustand zu kommen.

4. Das Beispiel Rent-a-Bike

Für das Rent-a-Bike-Beispiel mit den mit drei Stationen A (Bahnhof), B (Rathaus) und C (Stadtwald) und den Übergangswahrscheinlichkeiten



ergeben sich die Zweischritt-Übergangswahrscheinlichkeiten aus der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}65 & 0{,}65 \\ 0{,}11 & 0{,}1075 & 0{,}105 \\ 0{,}15 & 0{,}2425 & 0{,}245 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrrad, das sich zu Beginn in Station A befindet, nach zwei Tagen in C ist, 15 %.

→ *Übung 2*

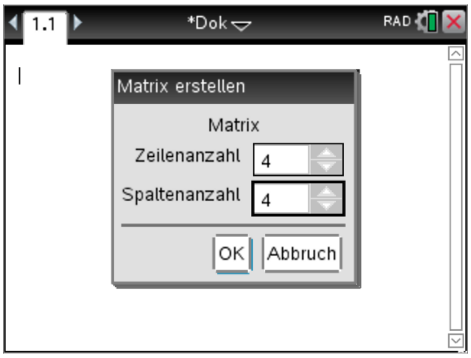
5. Übergangswahrscheinlichkeiten für sehr viele Übergänge

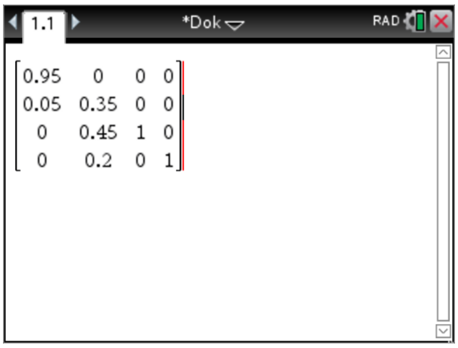
Im Rahmen der Pandemie-Untersuchung interessieren sich die Mathematiker insbesondere dafür, wie sich die Situation über einen längeren Zeitraum entwickelt. Hierzu wollen sie exemplarisch bestimmen, wie sich die Übergangswahrscheinlichkeiten über einen Zeitraum von 100 Tagen entwickeln. Dazu sollen die 100-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den vier Zuständen A, V, I und T bestimmt werden, die sich aus den Einträgen der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}$$

ergeben. Diese Matrix von Hand auszurechnen, ist nicht ratsam. Hierbei hilft der GTR weiter:

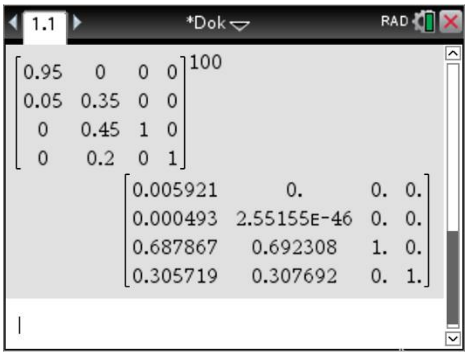
Wählen Sie menu 7 1 1 und geben Sie in der Maske für die Spalten- und die Zeilenanzahl jeweils 4 ein.





Wählen Sie OK und geben Sie in die Maske die Einträge der Matrix ein.

Verlassen Sie die Matrix nach rechts, geben Sie ^ 1 0 0 ein und tippen Sie enter



Gerundet auf 4 Stellen hinter dem Komma ist

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 0{,}0059 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6879 & 0{,}6923 & 1 & 0 \\ 0{,}3057 & 0{,}3077 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geht man zum Beispiel davon aus, dass zu Beginn der Pandemie alle Menschen einer Population von 1.000.000 Individuen ansteckbar sind, so ergibt sich nach 100 Tagen / Übergängen die Verteilung

$$\begin{pmatrix} 0{,}0059 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6879 & 0{,}6923 & 1 & 0 \\ 0{,}3057 & 0{,}3077 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.000.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.900 \\ 500 \\ 687.900 \\ 305.700 \end{pmatrix}:$$

Es sind 5.900 Menschen ansteckbar, 500 tragen gerade das Virus in sich, 687.900 sind immun geworden und 305.700 sind gestorben.

Um weiter in die Zukunft zu schauen, berechnen die Wissenschaftler die Übergangsmatrix für 1.000 Tage:

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{1.000} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6923 & 0{,}6923 & 1 & 0 \\ 0{,}3077 & 0{,}3077 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Von den 1.000.000 ursprünglich ansteckbaren Menschen sind 692.300 immun geworden und 307.700 Menschen sind gestorben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6923 & 0{,}6923 & 1 & 0 \\ 0{,}3077 & 0{,}3077 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.000.000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 692.300 \\ 307.700 \end{pmatrix}$$

In diesem Modell sterben also rund 31 % der Menschen, 69 % überleben und werden immun gegen das Virus!

→ *Übung 3*

6. Weitere Rechenoperationen für Matrizen

Für Matrizen gibt es – neben der Matrizenmultiplikation – weitere Rechenoperationen, die wir hier kurz vorstellen. Da Vektoren spezielle Matrizen sind, gelten die folgenden Ausführungen auch insbesondere für Vektoren.

A. Addition und Subtraktion von Matrizen und ihre Rechenregeln

Für Matrizen und Vektoren – die ja spezielle kann man neben der Multiplikation auch eine Addition und eine Subtraktion erklären. Wichtig ist dabei, dass die Matrizen, die addiert bzw. subtrahiert werden, die gleich viele Spalten und gleich viele Zeilen haben.

Definition. (Addition und Subtraktion von Matrizen)

Zwei $m \times n$-Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ und } N = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

werden eintragsweise addiert bzw. subtrahiert:

$$M + N = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \; M - N = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Für die Matrizenaddition gelten ein paar einfache Rechenregeln:

Satz. (Regeln der Matrizenaddition)
1. Die Matrizenaddition ist *kommutativ*, d.h. die Reihenfolge der Faktoren darf verändert werden: $M+N=N+M$.
2. Die Matrizenaddition ist *assoziativ*, d.h. die Summen von mehr als zwei Matrizen können in beliebiger Reihenfolge berechnet werden: $(P+M)+N=P+(M+N)$
3. Addiert man die **Nullmatrix** O, das ist diejenige Matrix, deren Einträge alle Null sind, ändert sich die Matrix nicht: $M+O=M$. Man sagt: Die Nullmatrix ist das neutrale Element der Matrizenaddition.

Im Wesentlichen bedeutet dies, dass für die Matrizenaddition dieselben Regeln wie für die Addition reeller Zahlen gelten.

B. Rechenregeln der Matrizenmultiplikation

Auch für die Matrizenmultiplikation gelten ein paar Rechenregeln, jedoch können nicht alle Regeln übertragen werden, die wir vorm rechnen mit Zahlen kennen. Die Matrizenmultiplikation ist nämlich nicht kommutativ, das heißt, man darf die Reihenfolge der Faktoren bei einem Produkt in der Regel nicht vertauschen. Zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ aber } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz. (Regeln der Matrizenmultiplikation)

1. Die Matrizenmultiplikation ist *assoziativ*, d.h. die Produkte von mehr als zwei Matrizen können in beliebiger Reihenfolge berechnet werden: $(P \cdot M) \cdot N = P \cdot (M \cdot N)$
2. Bei Matrizenmultiplikation und Matrizenaddition gelten zwei *Distributivgesetze*: $P \cdot (M + N) = P \cdot M + P \cdot N$ sowie $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

C. Skalarmultiplikation

Matrizen können auch mit reellen Zahlen multipliziert werden. Man nennt diese Operation auch Skalarmultiplikation.

Definition. (Skalarmultiplikation) Ein $m \times n$-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wird mit einer reellen Zahl α multipliziert, indem jeder Eintrag mit α malgenommen wird:

$$\alpha \cdot M = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Auch für die Skalarmultiplikation halten wir die wichtigsten Rechenregeln fest.

Satz. (Regeln der Skalarmultiplikation)

Im Folgenden stehen Großbuchstaben für Matrizen und kleine griechische Buchstaben für reelle Zahlen.

1. Die Skalarmultiplikation ist *assoziativ*, d.h. die Produkte von zwei Zahlen mit einer Matrix oder einer Zahl mit zwei Matrizen können in beliebiger Reihenfolge berechnet werden: $(\alpha \cdot \beta) \cdot M = \alpha \cdot (\beta \cdot M)$ und $\alpha \cdot (M \cdot N) = (\alpha \cdot M) \cdot N$.
   Außerdem gilt $(\alpha \cdot M) \cdot N = M \cdot (\alpha \cdot N)$.
2. Bei Skalarmultiplikation gelten zwei *Distributivgesetze*: $\alpha \cdot (M + N) = \alpha \cdot M + \alpha \cdot N$ sowie $(\alpha + \beta) \cdot M = \alpha \cdot M + \beta \cdot M$.
3. Ist $\alpha \cdot M = O$ (**Nullmatrix**), dann ist $\alpha = 0$ oder $M = O$.

Übungen zur Lerneinheit
Mehrstufige Prozesse und Matrizenmultiplikation

Übung 1.

1. Berechnen Sie die folgenden Produkte.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Prüfen Sie, ob das Produkt definiert ist, und berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

3. Berechnen Sie $M \cdot N$. Überprüfen Sie dann, ob auch $N \cdot M$ definiert ist, berechnen Sie gegebenenfalls auch dieses Produkt und vergleichen Sie die beiden Werte.

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

e) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 8 & 6 \\ 12 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

f) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 6 \\ 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

h) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

4. Berechnen Sie für $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$:

a) M^2 b) M^3 c) $2 \cdot M^3 - 4 \cdot M + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $M^2 + 2 \cdot M - 11 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Bestätigen Sie für die folgenden drei Matrizen
$$P=\begin{pmatrix}2&4&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}2&3\\1&3\\2&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}40&90&80&50\\50&0&50&70\end{pmatrix},$$
dass das Assoziativgesetz $(P\cdot M)\cdot N=P\cdot(M\cdot N)$ gilt.

6. Berechnen Sie für
$$P=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-5&1&3\\-3&1&2\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}-1&2&-4\\0&2&8\\1&-7&1\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&-7&3&0\\0&2&-1&4\end{pmatrix}$$
die folgenden Produkte und vergleichen Sie die Ergebnisse. Zur Erinnerung: Wären P,M,N reelle Zahlen, wären alle Ergebnisse gleich!
   a) $(P\cdot M)\cdot N$ b) $P\cdot(M\cdot N)$ c) $(M\cdot P)\cdot N$ d) $P\cdot(N\cdot M)$

7. Die Matrizenmultiplikation ist *nicht* nullteilerfrei: Dies bedeutet, es gibt Matrizen M und N, die beide nicht die Nullmatrix sind, für die aber $M\cdot N=O$ gilt. Die Nullmatrix O ist die Matrix, deren Einträge alle die Zahl Null sind.
   Anders als bei reellen Zahlen kann also im Bereich der Matrizen aus der Gleichung $M\cdot N=O$ nicht geschlossen werden, dass mindestens ein Faktor Null ist.
   a) Belegen Sie dies, indem Sie zwei von der Nullmatrix verschiedene 2x2-Matrizen angeben, deren Produkt O ist.
   b) Untersuchen Sie, ob es eine von der Nullmatrix verschiedene 2x2-Matrix M gibt, deren Quadrat O ist: $M^2=O$.

Übung 2.

1. Überprüfen Sie, ob die Zweischritt-Übergangswahrscheinlichkeiten für das im Text genannte Rent-a-Bike-Beispiel so sind, wie dort angegeben. Berechnen Sie dann, wieviele Fahrräder sich nach zwei Tagen in den drei Stationen befinden, wenn zu Beginn 50 Fahrräder in Station A, 40 Fahrräder in Station B und 10 Fahrräder in Station C waren.

2. Berechnen Sie für die Rent-a-Bike-Situation mit der Übergangsmatrix
$$M=\begin{pmatrix}0{,}2&0{,}3&0{,}2\\0{,}4&0{,}6&0{,}5\\0{,}4&0{,}1&0{,}3\end{pmatrix}$$
die 2-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie hiermit aus der Anfangsverteilung Station A: 70 % der Fahrräder, Station B: 20 % der Fahrräder und Station C: 10 % der Fahrräder die Anzahl der Fahrräder an den drei Stationen nach zweit Tagen.

3. Berechnen Sie für die Gruppe der 7.000 Nichtraucher, 2.000 Gelegenheitsraucher und 1.000 täglichen Rauchern mit der Übergangsmatrix
$$M=\begin{pmatrix}0{,}8&0{,}35&0{,}05\\0{,}12&0{,}33&0{,}1\\0{,}08&0{,}32&0{,}85\end{pmatrix}$$
die Anzahl derjenigen, die nach drei Jahren Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und (tägliche) Raucher sein werden. Geben Sie überdies die Wahrscheinlichkeiten an, dass

- ein zu Beginn Nichtraucher nach drei Jahren ein täglicher Raucher;
- ein zu Beginn täglicher Raucher nach drei Jahren ein Gelegenheitsraucher;
- ein zu Beginn täglicher Raucher nach drei Jahren ein Nichtraucher

ist.

4. Die KiTa Ömmes und Oimel will in vier Tagen einen Ausflug in den Wald machen. Der Ausflug kann nur bei trockenem Wetter stattfinden. Verwenden Sie das sehr einfache Modell des Wetters in Bonn mit der Übergangsmatrix
$$M = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}25 \\ 0{,}34 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$
zwischen Regentagen und Trockentagen, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass der Ausflug stattfinden kann, wenn heute
   a) trockenes Wetter
   b) regnerisches Wetter

   ist.
5. In einer Population von Insekten wurde die Verteilung zwei verschiedener Merkmale A und B über längere Zeit beobachtet. Dabei hatten Insekten mit Merkmal A zu 70 % Nachkommen mit Merkmal A und Insekten mit Merkmal B zu 20 % Nachkommen mit Merkmal A, was durch die Übergangsmatrix
$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix},$$
ausgedrückt wird. Berechnen Sie, wie das Verhältnis der Anzahlen der Tiere mit Merkmal A bzw. Merkmal B in der F3-Generation ist, wenn das Verhältnis in der P-Generation bei 6:4 liegt.

Übung 3. Berechnen Sie für die Übergangsmatrizen in Übung 2 die Übergangswahrscheinlichkeiten für einen großen Zeitraum, z.B. 1.000 Übergänge. Wählen Sie dann jeweils eine beliebige stochastische Anfangsverteilung und berechnen Sie die Verteilung nach dem sehr großen Zeitraum. Beschreiben Sie, was Sie beobachten.