Mehrstufige Prozesse, Matrizen und Vektoren

1. Ziele der Lerneinheit

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie,

- die Begriffe Übergangsgraph und Gozintograph kennen.
- welche Bedeutung die Begriffe Zustand und Übergangswahrscheinlichkeit haben.
- was man unter einer Matrix und einem Vektor versteht.
- wie man eine Matrix mit einem Vektor multipliziert.
- wie man mithilfe von Übergangsmatrizen und Verteilungsvektoren mehrstufige Prozesse modelliert.

2. Ein Beispiel: Der Schwarze Tod

Im Kontext der Corona-Krise des Jahres 2020 rücken auch andere, viel schlimmere Infektionskrankheit in den Fokus, wie zum Beispiel der „Schwarze Tod“, der im Mittelalter zwischen 1346 und 1353 in ganz Europa wütete und geschätzte 25 Millionen Todesopfer – ein Drittel der damaligen europäischen Bevölkerung – forderte. Weder wussten die Menschen damals, was die Ursache für diese Krankheit war, noch wussten sie, wie sie sich schützen konnten, von einem Heilmittel oder einem Impfstoff ganz zu schweigen. Der Schriftsteller GIOVANNI BOCCACCIO (1313 – 1375) erlebte die Zeit des Schwarzen Todes in Florenz. In seinem Dekamerone[1] schreibt er unter anderem:

> *Gegen dieses Übel half keine Klugheit oder Vorkehrung, obgleich […] man die Stadt durch eigens dazu ernannte Beamte von allem Unrat reinigen ließ, auch jedem Kranken den Eintritt verwehrte und manchen Ratschlag über die Bewahrung der Gesundheit erteilte.*
>
> *Etwa zu Frühlingsanfang […] begann die Krankheit schrecklich und erstaunlich ihre verheerenden Wirkungen zu zeigen. […] Es kamen zu Anfang der Krankheit gleichermaßen bei Mann und Weib an den Leisten oder in den Achselhöhlen gewisse Geschwulste zum Vorschein, die […] Pestbeulen genannt wurden. Später aber gewann die Krankheit eine neue Gestalt, und viele bekamen auf den Armen, den Lenden und allen übrigen Teilen des Körpers schwarze und bräunliche Flecke. […] Und so wie früher die Pestbeule ein sicheres Zeichen unvermeidlichen Todes gewesen und bei manchen noch war, so waren es nun diese Flecke für alle, bei denen sie sich zeigten. […] Dabei schien es, als ob zur Heilung dieses Übels kein ärztlicher Rat und die Kraft keiner Arznei wirksam oder förderlich wäre.*

---

[1] GIOVANNI BOCCACCIO: Das Decamerone (Ungekürzte deutsche Ausgabe, Originaltitel: Il Decamerone; Erstdruck: Venedig 1470), aus dem Italienischen übersetzt von Johann Heinrich Friedrich Karl Witte, Herausgeber: eClassica | AuraBooks

[…] Die wenigsten genasen, und fast alle starben innerhalb dreier Tage nach dem Erscheinen der beschriebenen Zeichen. […] Die Seuche gewann umso größere Kraft, da sie durch den Verkehr von den Kranken auf die Gesunden überging. […] Schon die Berührung der Kleider oder anderer Dinge, die ein Kranker gebraucht oder angefasst hatte, schien die Krankheit dem Berührenden mitzuteilen.

Es gab viele, die bei Tag oder Nacht auf offener Straße verschieden, viele, die ihren Geist in den Häusern aufgaben und ihren Nachbarn erst durch den Gestank, der aus ihren faulenden Leichen aufstieg, Kunde von ihrem Tode brachten. […] Überall starben Menschen. […] [Die Nachbarn] schleppten […] entweder selbst oder mit Hilfe einiger Träger, wenn sie solche bekommen konnten, die Körper der Toten aus ihren Wohnungen und legten sie vor den Türen nieder. So hätte, wer – zumal am Morgen – durch die Stadt gegangen wäre, der Leichen unzählige liegen sehen. […] Da für die große Menge Leichen […] der geweihte Boden nicht langte, […] machte man […] sehr tiefe Gruben und warf die neu Hinzukommenden in diese zu Hunderten. Hier wurden die Leichen aufgehäuft wie die Waren in einem Schiff und von Schicht zu Schicht mit ein wenig Erde bedeckt, bis die Grube bis zum Rand voll war.

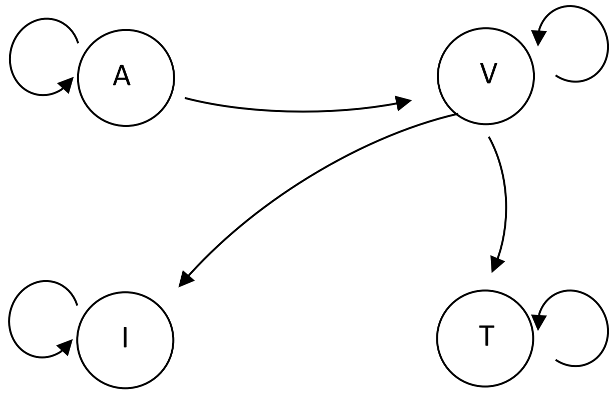
Wieviel rüstige Männer, schöne Frauen und blühende Jünglinge […] aßen noch am Morgen mit ihren Verwandten, Gespielen und Freunden, um am Abend des gleichen Tages in einer andern Welt mit ihren Vorfahren das Nachtmahl zu halten!

Mathematiker eines Think Tanks[2] machen sich daran, eine durch ein Virus hervorgerufene Pandemie modellhaft zu analysieren. Dabei gehen sie in einer ersten, einfachen Untersuchung davon aus, dass die dem Virus ausgesetzte Population in vier Gruppen eingeteilt werden kann.

- Die **Ansteckbaren**: Das sind diejenige, die sich mit dem Virus infizieren können und keine Immunität haben. Die Mathematiker kennzeichnen diese Gruppe mit dem Buchstaben **A**.
- Die **mit dem Virus infizierten**: Das sind diejenigen, in deren Körper das Virus eigedrungen ist. Diese Gruppe wird in den Rechnungen der Mathematiker mit dem Buchstaben **V** bezeichnet.
- Die **Immunen**: Das sind die Menschen, die Antikörper gegen das Virus ausgebildet haben, und die deshalb nicht mehr infiziert werden können. Für diese Gruppe steht im Folgenden der Buchstabe **I**.
- Die **Toten**, die infolge der Infektion durch den Virus verstorben sind. Sie werden mit dem Buchstaben **T** gekennzeichnet.

Die Mathematiker vernachlässigen bei Ihren Untersuchungen alle anderen Krankheiten, die in der Population auftreten können, und alle Todesursachen, die nicht von dem Virus verursacht werden. Sie gehen von einer Modellannahme aus, die sich grafisch so darstellt:

[2] Denkfabrik; ein Institut, das politische, soziale und wirtschaftliche Konzepte und Strategien erforscht und entwickelt



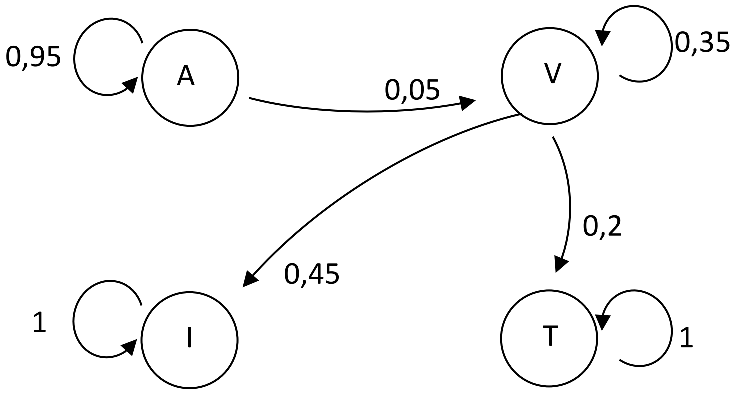
Dies bedeutet:

- Ein gewisser Anteil der ansteckbaren Menschen (A) infiziert sich im Lauf eines Tages mit dem Virus und gehört deshalb am nächsten Tag zur Gruppe V. Wer sich nicht infiziert gehört am nächsten Tag weiterhin zur Gruppe A.
- Im Lauf eines Tages stirbt ein gewisser Anteil der mit dem Virus infizierten. Ein Teil gesundet und wird damit immun gegen das Virus. Ein Teil bleibt weiterhin mit dem Virus infiziert.
- Die verstorbenen Mitglieder der Gruppe V werden zukünftig der Gruppe T zugeordnet, die weiterhin infizierten gehören am nächsten Tag wieder zu V.
- Die gesundeten Mitglieder der Gruppe V gehören am nächsten Tag zur Gruppe I.

Die Wissenschaftler gehen dabei von folgenden Anteilen aus.

- 5 % der ansteckbaren Menschen infizieren sich innerhalb eines Tages.
- 35 % der mit dem Virus infizierten Menschen bleiben nach einem Tag infiziert.
- 20 % der mit dem Virus infizierten Menschen sterben innerhalb eines Tages.

Diese Anteile können in die Grafik eingetragen werden:



3. Übergangsgraph und Übergangsmatrix

Eine solche grafische Darstellung nennt man in der Mathematik auch einen **Übergangsgraphen** oder auch **Gozintographen** (nach dem fiktiven italienischen Mathematiker Zepartzat Gozinto: the part that goes into). Er besteht aus **Knoten** – in unserem Fall sind sie mit A, V, I und

T bezeichnet und entsprechen den Populationsgruppen – und **gerichteten Kanten** zwischen diesen Knoten. Eine gerichtete Kante in einem Graphen ist eine Verbindung zweier Knoten, die (wie eine Einbahnstraße) nur in einer Richtung durchquert werden darf. Durch eine Pfeilspitze ist die zulässige Richtung angegeben.

Definition. (Zustände und Übergangswahrscheinlichkeiten)

1. Die Knoten des Gozintographen heißen auch **Zustände**.
2. Die relativen Häufigkeiten/ Wahrscheinlichkeiten an den gerichteten Kanten heißen **Übergangswahrscheinlichkeiten**.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten geben also an, in wie viel Prozent der Fälle ein Objekt, das sich in einem bestimmten Zustand befindet, in einen anderen oder den gleichen Zustand übergeht.

Um die Übergangswahrscheinlichkeiten übersichtlich darzustellen, bietet sich eine sogenannte **Übergangsmatrix** an, in der nur die Übergangswahrscheinlichkeiten vermerkt sind:

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{V} & \text{I} & \text{T} \end{array} \\ \text{nach} \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{V} \\ \text{I} \\ \text{T} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Oft – und insbesondere beim Rechnen – werden wir die Beschreibung „von… nach…“ weglassen und nur die „Matrix“

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

notieren. → *Übung 1*

Definition. (Matrix)

1. Eine **Matrix** (Mehrzahl: Matrizen) ist ein rechteckiges Schema von tabellarisch angeordneten Zahlen. Diese Zahlen werden wir auch die **Einträge** der Matrix nennen. Besteht eine Matrix aus m Zeilen und n Spalten, spricht man auch von einer $m \times n$-Matrix.
2. Eine **stochastische Matrix** ist eine quadratische Matrix, in der keine negativen Zahlen vorkommen, und die Summe der Zahlen in jeder Spalte den Wert 1 ergibt.

Matrizen werden wir in der Regel durch große Buchstaben kennzeichnen, zum Beispiel

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix M ist offenbar eine stochastische Matrix. → *Übung 2*

4. Vektoren

In einer ersten Analyse untersuchen die Mathematiker, wie sich eine Population weiterentwickeln würde, in der es nach einer gewissen Zeit 750.000 Ansteckbare, 250.000 mit dem Virus infizierte 75.000 Immune und bereits 25.000 verstorbene Individuen gäbe. Ähnlich wie die Übergangswahrscheinlichkeiten in einer Übergangsmatrix übersichtlich notiert werden können, können auch diese Werte in einer speziellen Matrix zusammengestellt werden, indem sie in der Reihe der Zustände A, V, I und T untereinander notiert werden: $\begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix}$.

Eine solche Matrix mit nur einer Spalte hat einen speziellen Namen:

Definition. (Vektor/ Verteilungsvektor)

1. Eine Matrix, die nur eine einzige Spalte hat, nennt man auch **Vektor**. Die Einträge eines Vektors nennen wir auch seine **Komponenten**.
2. Sind alle Komponenten des Vektors nicht negativ, nennen wir den Vektor auch **Verteilungsvektor**. Ein Verteilungsvektor, bei dem die Summe der Komponenten den Wert 1 ergibt, nennen wir **stochastischen Verteilungsvektor**.
3. Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die Menge aller Vektoren, die genau n Komponenten haben.

Vektoren werden in der Regel durch kleine Buchstaben, meist vom Ende des Alphabets, die traditionell mit einem Pfeil versehen sind, gekennzeichnet, z.B.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten eines *stochastischen* Verteilungsvektors geben an, welcher *Anteil* aller Objekte sich in den verschiedenen Zuständen befinden.

Die Wissenschaftler fragen sich, wie sich die Individuen der Population am folgenden Tag (also nach einem weiteren Übergang) in den verschiedenen Zuständen befinden werden.

- Die neue Anzahl der Ansteckbaren erhält man, indem man die alte Anzahl mit $0{,}95$ multipliziert: $0{,}95 \cdot 750.000 = 712.500$
- Die Gruppe der mit dem Virus infizierten erhält einen Anteil von $0{,}05$ aus der Gruppe der Ansteckbaren und einen Anteil von $0{,}35$ aus der Gruppe der mit dem Virus infizierten: $0{,}05 \cdot 750.000 + 0{,}35 \cdot 250.000 = 125.000$
- Die Gruppe der Immunen behält sämtliche Individuen dieser Gruppe und erhält zusätzlich einen Anteil von $0{,}45$ aus der Gruppe der mit dem Virus infizierten: $0{,}45 \cdot 250.000 + 1 \cdot 75.000 = 187.500$
- Die Gruppe der Toten erhält zusätzlich einen Anteil von 0,2 aus der Gruppe der mit dem Virus infizierten und behält natürlich den vollen Anteil sämtlicher bereits verstorbener Individuen: $0{,}2 \cdot 250.000 + 1 \cdot 25.000 = 75.000$

Die neue Verteilung auf die einzelnen Zustände wird erneut als Vektor dargestellt:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 712.500 \\ 125.000 \\ 187.500 \\ 75.000 \end{pmatrix}.$$

Dieses Verfahren, aus einer Matrix und einem Vektor einen neuen Vektor zu gewinnen, bezeichnet man auch als **Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor**. Man schreibt deshalb

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 712.500 \\ 125.000 \\ 187.500 \\ 75.000 \end{pmatrix}.$$

Man erhält dabei die i-te Zeile des Ergebnisses, indem man die Einträge der i-te Zeile der Matrix nacheinander mit den entsprechenden Einträgen des Vektors multipliziert und die Ergebnisse dann addiert. Man sagt auch: Bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor rechnet man **Zeile mal Spalte**:

$$\begin{pmatrix} \mathit{0{,}95} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \mathit{0{,}05} & \mathit{0{,}35} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \mathit{0} & \mathit{0{,}45} & \mathit{1} & \mathit{0} \\ \mathit{0} & \mathit{0{,}2} & \mathit{0} & \mathit{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{750.000} \\ \mathbf{250.000} \\ \mathbf{75.000} \\ \mathbf{25.000} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathit{0{,}95} \cdot \mathbf{750.000} + \mathit{0} \cdot \mathbf{250.000} + \mathit{0} \cdot \mathbf{75.000} + \mathit{0} \cdot \mathbf{25.000} \\ \mathit{0{,}05} \cdot \mathbf{750.000} + \mathit{0{,}35} \cdot \mathbf{250.000} + \mathit{0} \cdot \mathbf{75.000} + \mathit{0} \cdot \mathbf{25.000} \\ \mathit{0} \cdot \mathbf{750.000} + \mathit{0{,}45} \cdot \mathbf{250.000} + \mathit{1} \cdot \mathbf{75.000} + \mathit{0} \cdot \mathbf{25.000} \\ \mathit{0} \cdot \mathbf{750.000} + \mathit{0{,}2} \cdot \mathbf{250.000} + \mathit{0} \cdot \mathbf{75.000} + \mathit{1} \cdot \mathbf{25.000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 712.500 \\ 125.000 \\ 187.500 \\ 75.000 \end{pmatrix}$$

Da wir mit dem Verteilungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 750.000 \\ 250.000 \\ 75.000 \\ 25.000 \end{pmatrix}$ beginnen, wollen wir diesen auch **Startvektor** nennen. Wir halten unser Ergebnis allgemein fest:

> **Satz. (Berechnung der Verteilung bei einstufigen Prozessen).** Ist die Verteilung von Objekten auf verschiedene Zustände durch einen Verteilungsvektor $\vec{x}$ festgelegt und sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen durch eine Übergangsmatrix M gegeben, so erhält man den Verteilungsvektor $\vec{y}$ für die neue Verteilung der Objekte, indem man die Übergangsmatrix M mit dem Startvektor $\vec{x}$ multipliziert: $\vec{y} = A\vec{x}$.

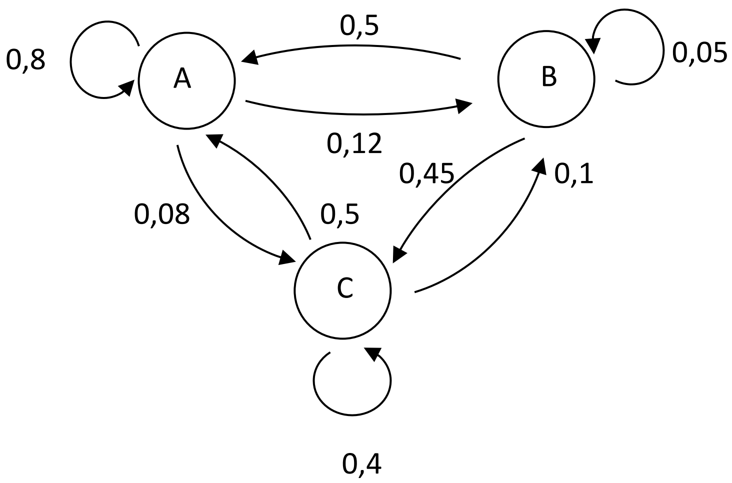
→ *Übung 3*

5. Ein weiteres Beispiel: Rent-a-Bike.

citybike-Station in Wien

Aus Gründen des Umweltschutzes – und um dem Verkehrsinfarkt zu entkommen – steigen zunehmend mehr Menschen vom Auto auf öffentliche Verkehrsmittel oder das Fahrrad um. Viele Städte – wie zum Beispiel die österreichische Hauptstadt Wien mit ihrem citybike-Programm – unterstützen dies, indem sie die Möglichkeit anbieten, Fahrräder stundenweise anzumieten. Dabei können die Räder an einer Station angemietet, eine gewisse Zeit genutzt und dann an dieser oder einer anderen Station zurückgegeben werden.

Eine mittelgroße Stadt im Rheinland betreibt seit dem Frühjahr ein derartiges Rent-a-Bike-System mit drei Stationen. Station A befindet sich am Bahnhof, Station B am Rathaus und Station C am Stadtwald, einem oft genutzten Naherholungsgebiet. Durch Langzeitbeobachtung haben die für das Verleihsystem zuständigen Mitarbeiter ermittelt, wie sich die Verteilung der Fahrräder an den verschiedenen Stationen im Verlauf eines Tages ändert. Dazu haben Sie über zwei Monaten hinweg für jedes Fahrrad festgehalten, an welcher Station sich das Rad bei der Öffnung der Stationen um 7 Uhr und bei der Schließung der Stationen um 21 Uhr befand. Die relativen Häufigkeiten eines Transfers im Lauf eines Tages haben Sie in Form eines Graphen dargestellt:



Befindet sich ein bestimmtes Fahrrad bei Öffnung der Station in Station A (Bahnhof), so ist es

- mit einer relativen Häufigkeit von 0,8 (also in 80 % aller Fälle) bei Schließung der Station wieder in Station A,
- mit einer relativen Häufigkeit von 0,12 (also in 12 % aller Fälle) in Station B (Rathaus)
- und mit einer relativen Häufigkeit von 0,08 (also in 8 % aller Fälle) in Station C (Stadtwald).

Aus dem Gozintographen ergibt sich die folgende Übergangsmatrix M:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \text{nach} & \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Stadtverwaltung hat für ihr Rent-a-Bike-Projekt 100 Fahrräder angeschafft, die sich auf die verschiedenen Stationen verteilen. An einem Morgen wurde folgende Verteilung der Fahrräder auf die Stationen in einem Verteilungsvektor festgehalten: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}$. Es waren also in Station A 50 Fahrräder, in Station B 40 und in Station C 10 Fahrräder. Für die Verteilung $\vec{y}$ am nächsten Morgen (die der am Abend des aktuellen Tages entspricht), ergibt sich

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{50} \\ \mathbf{40} \\ \mathbf{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot \mathbf{50} + 0{,}5 \cdot \mathbf{40} + 0{,}5 \cdot \mathbf{10} \\ 0{,}12 \cdot \mathbf{50} + 0{,}05 \cdot \mathbf{40} + 0{,}1 \cdot \mathbf{10} \\ 0{,}08 \cdot \mathbf{50} + 0{,}45 \cdot \mathbf{40} + 0{,}4 \cdot \mathbf{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 9 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Es befinden sich dann also 65 Fahrräder in Station A, 9 Fahrräder in Station B und 26 Fahrräder in Station C.

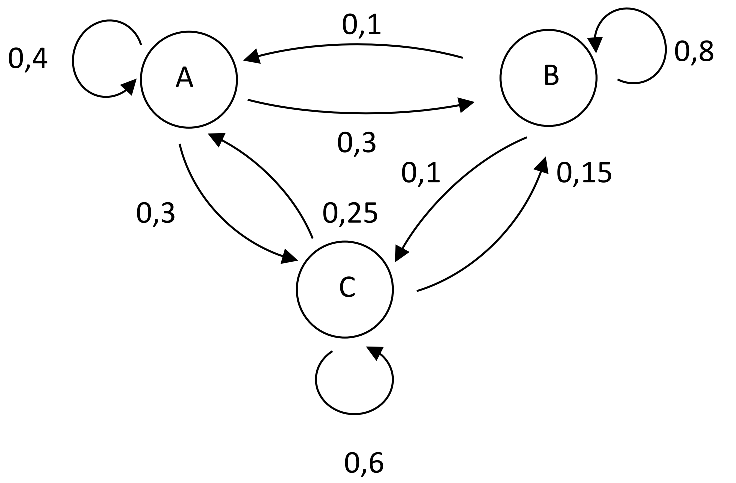
→ *Übung 4*

Übungen zur Lerneinheit
Mehrstufige Prozesse, Matrizen und Vektoren

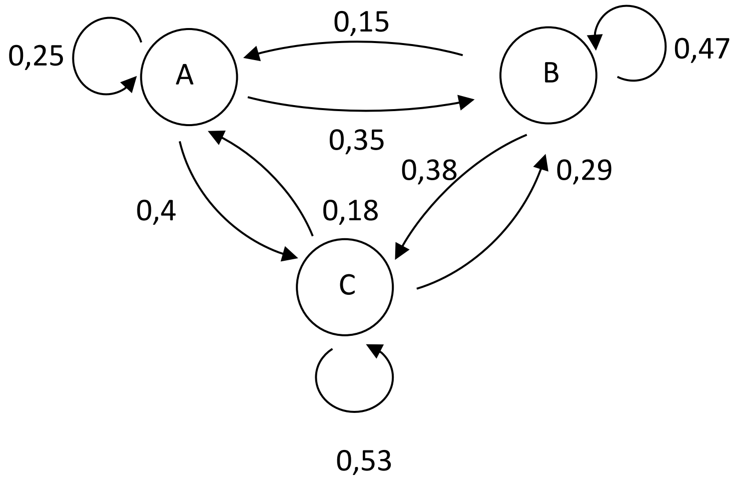
Übung 1.

1. Bestimmen Sie aus den folgenden Gozintographen jeweils die Übergangsmatrix.

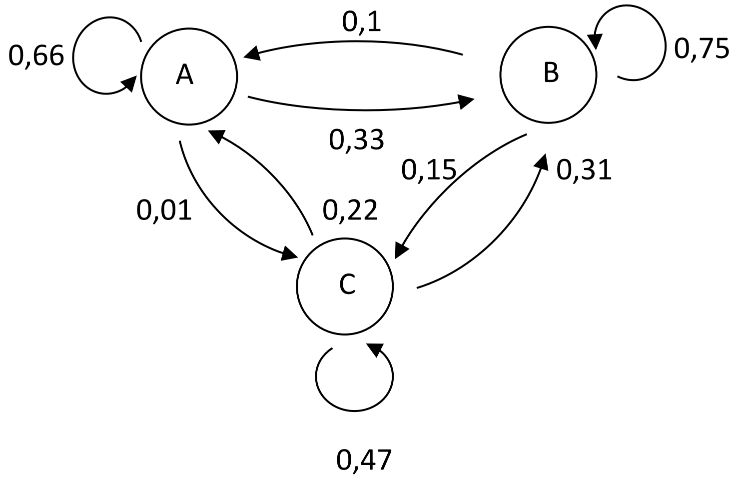
a)



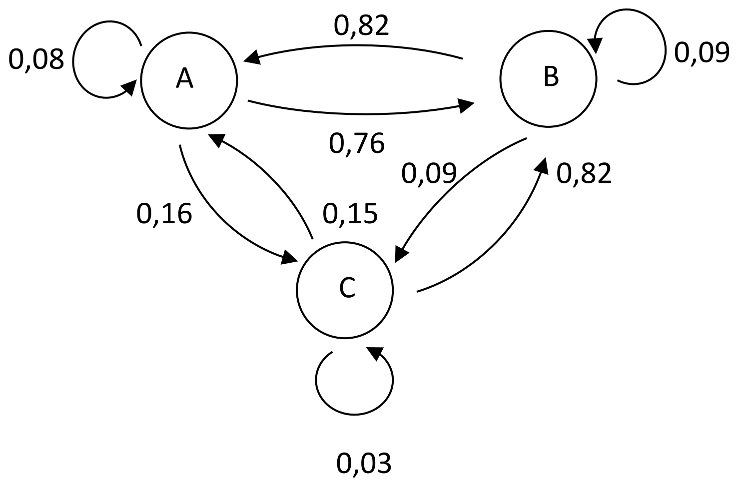
b)



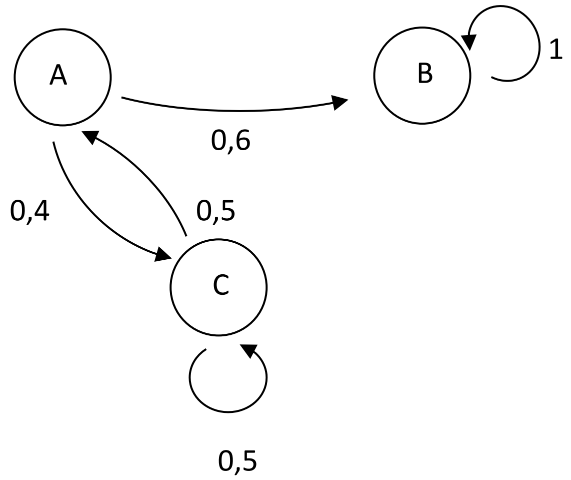
c)



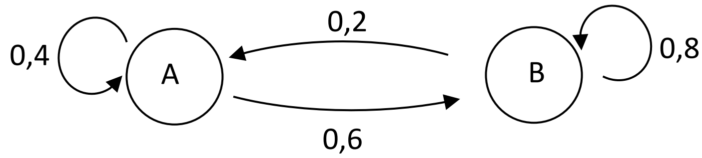
d)



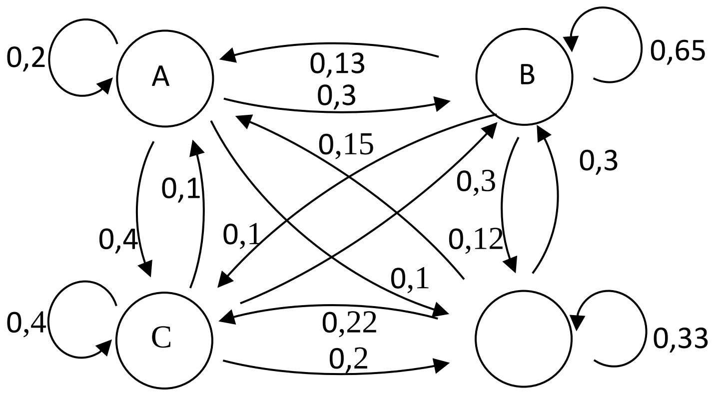
e)



f)



g)



2. Stellen Sie die durch die folgenden Matrizen A gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten in Form eines Gozintographen dar.

a) $A=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 0,3 \\ 0,65 & 0,4 & 0,23 \\ 0,2 & 0,48 & 0,47 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,45 & 0,71 \\ 0,69 & 0,45 & 0,06 \\ 0,21 & 0,1 & 0,23 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0,6 & 1 \\ 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 & 0,27 \\ 0,15 & 0,1 & 0,4 & 0,38 \\ 0,45 & 0,3 & 0,2 & 0,32 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,03 \end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,15 & 0,25 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 & 1 \\ 0,5 & 0,15 & 0,45 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

j) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Übung 2. Ergänzen Sie zu stochastischen Matrizen.

a) $A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,7 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,3 \\ ? & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} ? & 0,45 & 0,2 \\ 0,8 & 0,15 & ? \\ 0,1 & ? & 0,4 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} ? & 0,6 & 0,35 \\ 0,3 & 0,15 & ? \\ 0,5 & ? & 0,25 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ 0,6 & 0,2 & 1 \\ 0,1 & 0,4 & ? \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ 1 & 1 & 1 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ ? & ? \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} ? & ? \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix} 0,4 & ? & ? & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 0,6 \\ ? & 0,25 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,15 & 0,3 & ? \end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix} 0 & ? & ? & ? \\ 0 & 0,3 & 1 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & ? & 0,8 \\ ? & 0,1 & ? & ? \end{pmatrix}$

j) $A=\begin{pmatrix} ? & 0 & 0 & 1 \\ ? & ? & 0 & ? \\ ? & 0 & ? & ? \\ 1 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$

Übung 3. Berechnen Sie die folgenden Produkte.

a) $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}6 & 0{,}4 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 & -1 \\ 3 & 1{,}5 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}1 & 0 \\ 1{,}5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 5{,}8 & 0 & 6 \\ -0{,}1 & -3 & 0 & -4 \\ 1{,}8 & 1{,}9 & -1 & 0 \\ 5{,}3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -0{,}1 & 4 & 2{,}3 & 6{,}8 \\ 0{,}2 & 0 & 10 & 1 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & -4 & -1 \\ 2{,}8 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -0{,}1 & 4 & 2{,}3 & 6{,}8 \\ 0{,}2 & 0 & 10 & 1 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & -4 & -1 \\ 2{,}8 & -3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Übung 4.

1. Um die Lärm- und Abgasbelastung in ihrer Stadt zu verringern und gleichzeitig die Fitness ihrer Bürger zu fördern unterhält eine Stadt drei Stationen A, B und C, an denen sich die Bürger ab 7.00 Uhr Fahrräder ausleihen können. Ein an einer Station ausgeliehenes Fahrrad muss bis spätestens 22.00 Uhr an dieser oder einer der anderen Station wieder zurückgegeben werden. Die folgende Tabelle gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten ein Fahrrad von morgens bis abends die Station wechselt:

Station am Morgen	A	A	B	B	C	C
Station am Abend	B	C	A	C	A	B
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,4	0,3	0,1	0,2	0,5

   An Station B befinden sich um 7.00 Uhr 20 % der Fahrräder und an Station C 10 % Fahrräder.
   a) Erstellen Sie für die Situation den Gozintographen.
   b) Geben Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor an.
   c) Berechnen Sie, wie viele Fahrräder sich am Abend an jeder der Stationen befinden werden.

2. Für eine langjährige Untersuchung über das Rauchen wird eine Gruppe von 10.000 Menschen über mehrere Jahre beobachtet. Die Gruppe gliedert sich in Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und (tägliche) Raucher. Die Wissenschaftler, die die Untersuchung durchführen, gehen davon aus, dass im Lauf eines Jahres
   - von den Nichtrauchern 80 % Nichtraucher bleiben, 12 % zu Gelegenheitsrauchern und 8 % zu täglichen Rauchern werden;

- von den Gelegenheitsrauchern 35 % zu Nichtrauchern werden, 33 % Gelegenheitsraucher bleiben und 32 % tägliche Raucher werden;
- von den täglichen Rauchern 5 % zu Nichtrauchern und 10 % zu Gelegenheitsrauchern werden und 85 % tägliche Raucher bleiben.

Zu Beginn der Untersuchung besteht die Gruppe aus 7.000 Nichtrauchern, 2.000 Gelegenheitsrauchern und 1.000 täglichen Rauchern.

a) Stellen Sie die beschriebene Situation in einem Gozintographen mit drei Zuständen dar.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor an.
c) Berechnen Sie, wie viele Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und (tägliche) Raucher es nach einem Jahr geben wird.

3. In einem sehr einfachen Modell des Wetters in Bonn wird davon ausgegangen, dass ein Tag entweder regnerisch oder trocken ist, und die Wahrscheinlichkeit, nach einen regnerischen Tag einen weiteren zu haben, bei 0,66, und die Wahrscheinlichkeit, nach einem trockenen Tag einen regnerischen zu haben, bei 0,25 liegt.
   a) Stellen Sie die beschriebene Situation in einem Gozintographen mit zwei Zuständen dar.
   b) Geben Sie die Übergangsmatrix an.

4. Eine Population von Insekten enthält Tiere mit je einem von zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z.B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, dass Insekten mit Merkmal A zu 70 % Nachkommen mit Merkmal A haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 20 % Nachkommen mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.
   a) Stellen Sie für die Situation den Gozintograph mit zwei Zuständen dar.
   b) Geben Sie die Übergangsmatrix an.
   c) Nach einer Zählung wurde für Waldgebiet ein Verhältnis von 6:4 für die Träger von Merkmal A und Merkmal B ermittelt. Berechnen Sie, welches Verhältnis sich in der F1-Generation finden wird.

5. Die Farbe (grün oder gelb) der Schoten einer Erbsenpflanze wird durch zwei Gene bestimmt, wobei das Gen G für grüne Farbe dominant und das Gen g für gelbe Farbe rezessiv ist. Damit sind folgende drei Genotypen möglich
   - GG: beide Gene dominant, man spricht von reinerbig dominant
   - Gg: ein Gen dominant, ein Gen rezessiv, man spricht von mischerbig
   - gg: beide Gene rezessiv, man spricht von reinerbig rezessiv

   Es wird nun ein *mischerbiges Elternteil* mit einer großen Population von Pflanzen beliebigen Genotyps gekreuzt. Wenn wir annehmen, dass die beiden Gene jedes der Elternteile jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf die Nachkommen vererbt werden, ergeben sich unter den Nachkommen folgende Genotypen:

Genotyp 2. Elternteil	Genotyp Nachkomme	Anteil
GG	GG	0,5
	Gg	0,5
Gg	GG	0,25
	Gg	0,5
	gg	0,25
gg	Gg	0,5
	gg	0,5

a) Stellen Sie für den Übergang „Genotyp 2. Elternteil“ $\rightarrow$ „Genotyp Nachkomme“ den Gozintographen mit den drei Zuständen GG, Gg und gg auf.
b) Geben Sie die Übergangsmatrix an.
c) In der Population, die mit den mischerbigen Pflanzen gekreuzt wurde, finden sich 20 % des Genotyps GG und 30 % des Genotyps gg. Berechnen Sie die Verteilung der Genotypen unter den Nachkommen.
d) Beweisen Sie, dass unabhängig von der Verteilung der Genotypen in der Population, die mit den mischerbigen Pflanzen gekreuzt wurde, unter den Nachkommen stets 50 % den Genotyp Gg haben.
e) Wiederholen Sie die Übungen a) bis c) unter der Voraussetzung, dass statt des mischerbigen ersten Elternteils ein reinerbig dominantes erstes Elternteil verwendet wurde. Erläutern Sie mithilfe der Übergangsmatrix, dass keine reinerbig rezessiven Nachkommen auftreten können.

Lösungen der Übungen zur Lerneinheit *Mehrstufige Prozesse, Matrizen und Vektoren*

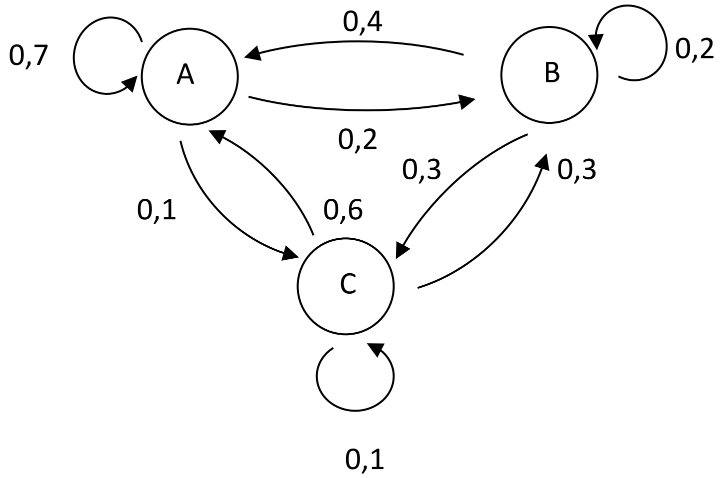
Übung 1.

1. a) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}25 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}18 \\ 0{,}35 & 0{,}47 & 0{,}29 \\ 0{,}4 & 0{,}38 & 0{,}53 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}1 & 0{,}22 \\ 0{,}33 & 0{,}75 & 0{,}31 \\ 0{,}01 & 0{,}15 & 0{,}47 \end{pmatrix}$

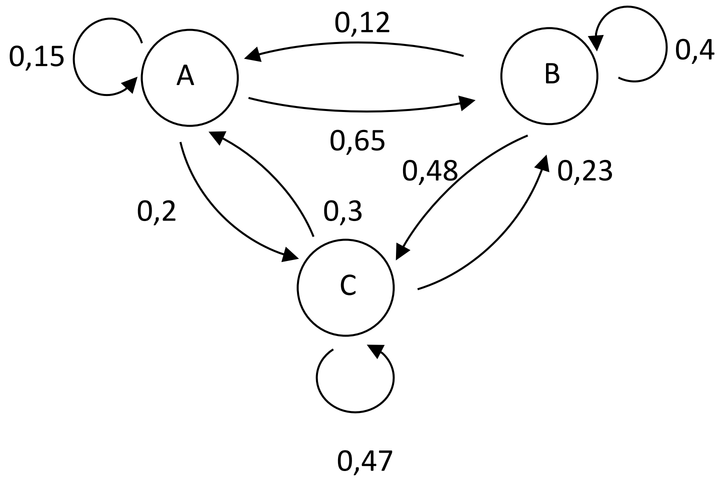
   d) $\begin{pmatrix} 0{,}08 & 0{,}82 & 0{,}15 \\ 0{,}76 & 0{,}09 & 0{,}82 \\ 0{,}16 & 0{,}09 & 0{,}03 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

   g) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}13 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}3 & 0{,}65 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}22 \\ 0{,}1 & 0{,}12 & 0{,}2 & 0{,}33 \end{pmatrix}$

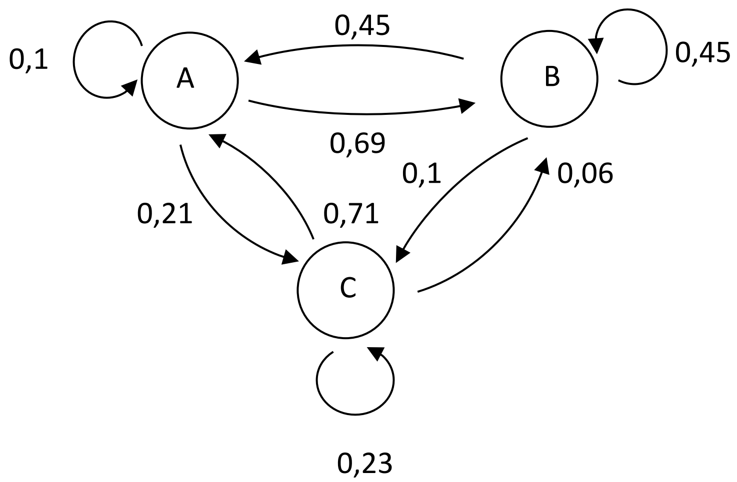
2. a)



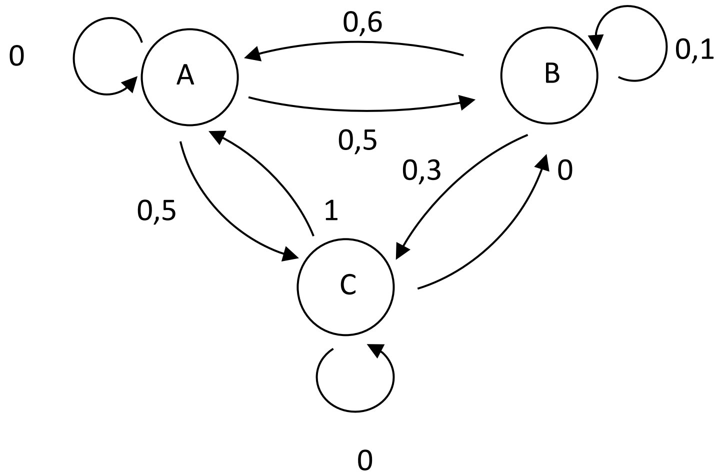
   b)



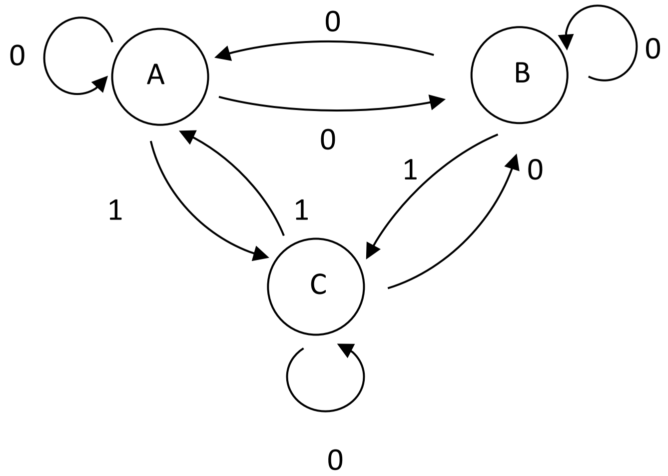
c)


0,45
0,1
A
B
0,45
0,69
0,1
0,06
0,21
0,71
C
0,23

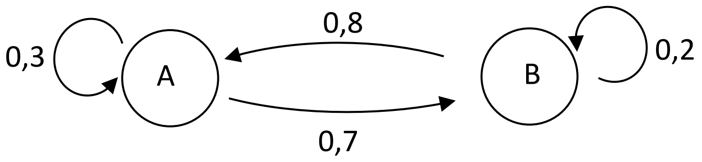
d)


0,6
0
A
B
0,1
0,5
0,3
0
0,5
1
C
0

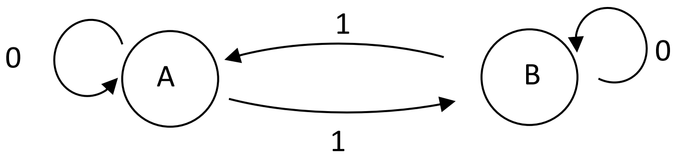
e)


0
0
A
B
0
0
1
0
1
1
C
0

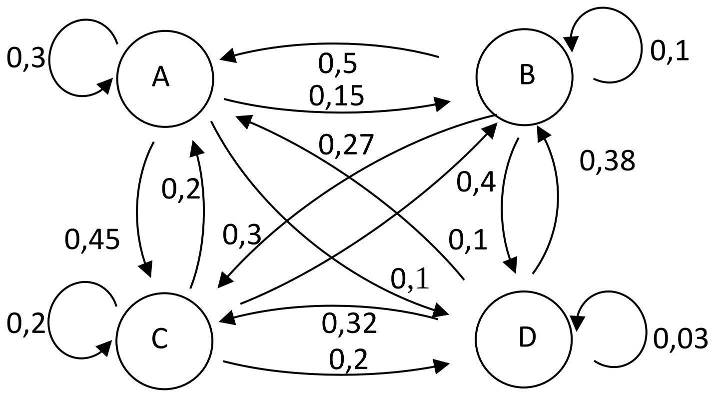
f)


0,8
0,3
A
B
0,2
0,7

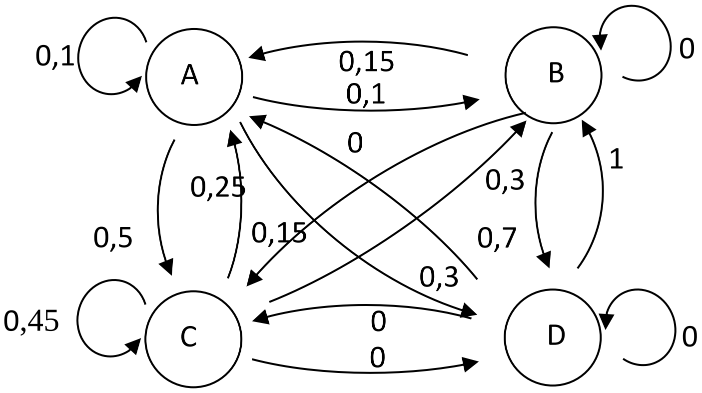
g)


1
0
A
B
0
1

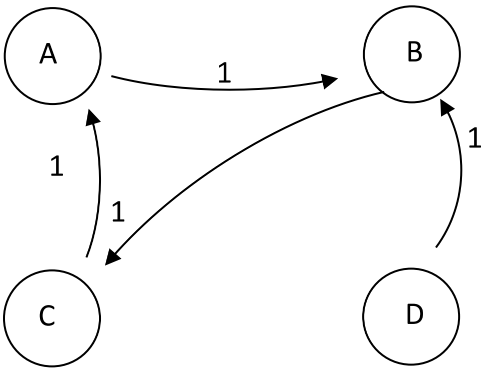
h)



i)



j)



Übung 2.

a) 0,3
b) 0,1; 0,4; 0,4
c) 0,2; 0,25; 0,4
d) 0,3; 0,4; 0
e) alle Werte sind 0
f) 0,6; 0,7
g) 0; 1
h) 0,3; 0,4; 0,3; 0,1
i) 1; 0,5; 0; 0
j) 0; 1; 1; 0

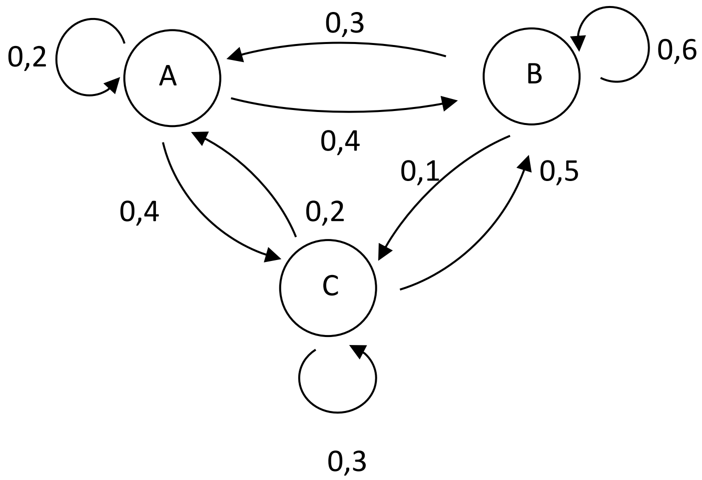
Übung 3.

a) $\begin{pmatrix} 5,4 \\ 2,1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4,6 \\ 1,8 \\ 9,2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -17,8 \\ -36 \\ -71 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -27 \\ 25 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 19 \\ -17 \\ -10{,}5 \\ 20 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 1{,}5 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 2{,}3 \\ 10 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Übung 4.

1. a)

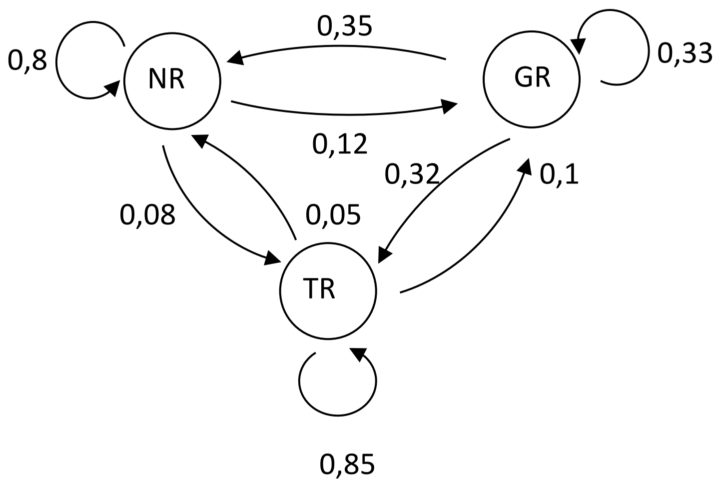


b) $$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix};\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 45 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Es sind also 22 Fahrräder an Station A, 45 Fahrräder an Station B und 33 Fahrräder an Station C.

2. a)

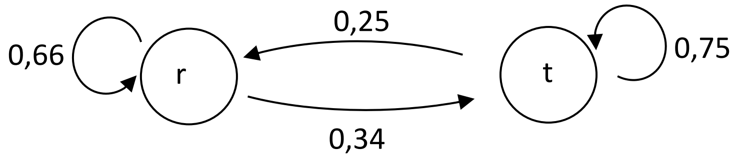


b) $$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}35 & 0{,}05 \\ 0{,}12 & 0{,}33 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}85 \end{pmatrix};\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}35 & 0{,}05 \\ 0{,}12 & 0{,}33 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6350 \\ 1600 \\ 2050 \end{pmatrix}$

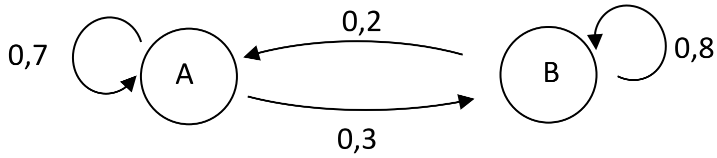
Es sind also 6350 Personen Nichtraucher, 1600 Personen Gelegenheitsraucher und 2050 Personen tägliche Raucher.

3. a)



b) $A = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}25 \\ 0{,}34 & 0{,}75 \end{pmatrix}$

4. a)

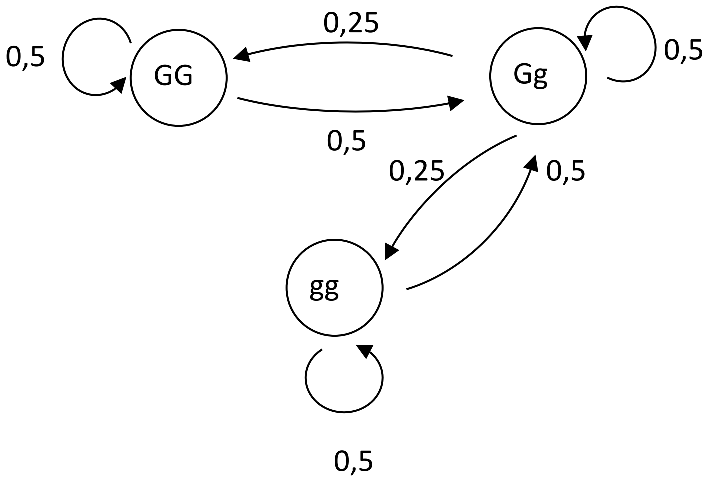


b) $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Es wird in der F1-Generation also genauso viele Träger von Merkmal A wie von Merkmal B geben.

5. a)



b) $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22{,}5 \\ 50 \\ 27{,}5 \end{pmatrix}$

Von den Nachkommen werden also 22,5 % den Genotyp GG, 50 % den Genotyp Gg und 27,5 % den Genotyp gg haben.

d) Angenommen, in der Elterngeneration haben p % den Genotyp GG und q % den Genotyp Gg. Dann haben $100-(p+q)$ % den Genotyp gg. Um die Verteilung der Genotypen unter den Nachkommen zu bestimmen, berechnet man:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1-(p+q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5p+0{,}25q \\ 0{,}5p+0{,}5q+0{,}5\left[100-(p+q)\right] \\ 0{,}25q+0{,}5\left[100-(p+q)\right] \end{pmatrix}$$

Der Anteil der Individuen mit Genotyp Gg ergibt sich aus der zweiten Komponente des Vektors. Diese kann wie vereinfacht werden:

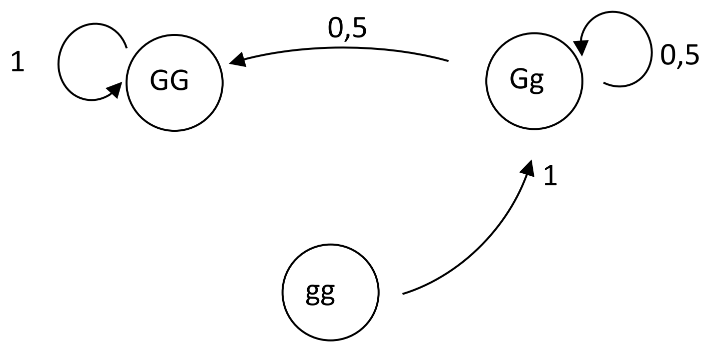
$$0{,}5p+0{,}5q+0{,}5\left[100-(p+q)\right]=0{,}5p+0{,}5q+50-0{,}5(p+q)$$

$$=0{,}5p+0{,}5q+50-0{,}5p-0{,}5q=50.$$

e) Ein Genotyp GG ergibt die Nachkommen

- bei Kreuzung mit GG: ausschließlich GG.
- bei Kreuzung mit Gg: GG, Gg, GG, Gg, also jeweils 50 % GG und Gg.
- bei Kreuzung mit gg: ausschließlich Gg.

Der Gozintograph ist also



Übergangsmatrix:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verteilung der Genotypen unter den Nachkommen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 55 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es haben also 45 % Genotyp GG und 55 % Genotyp Gg.

Da die letzte Zeile der Übergangsmatrix nur Nullen enthält, ergibt sich bei der Multiplikation der Matrix mit jeder beliebigen Startverteilung in der letzten Komponente des Ergebnisvektors der Wert Null. Diese Komponente ist der Anteil der Pflanzen mit Genotyp gg in der Nachkommengeneration.