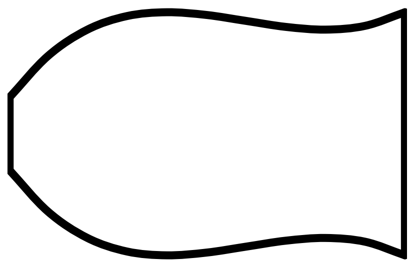
Anwendungen der Integralrechnung

1. Ziele der Lerneinheit

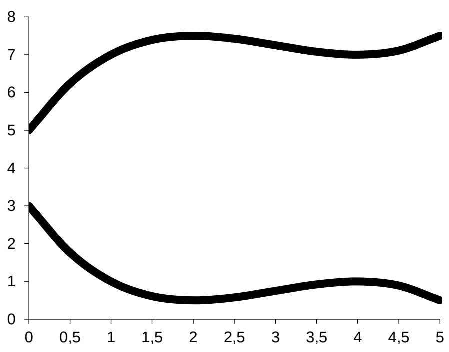
In der folgenden Lerneinheit lernen Sie,

- wie der Inhalt einer Fläche, die von zwei Funktionsgraphen begrenzt wird, berechnet werden kann;
- wie man den durchschnittlichen Wert, den eine Funktion auf einem Intervall hat, berechnen kann;
- was man unter der Bogenlänge versteht und wie man sie berechnen kann;
- was Rotationskörper sind und wie man deren Volumen mithilfe der Integralrechnung berechnen kann.

2. Anwendung 1: Zweiseitig krummlinig begrenzte Flächen



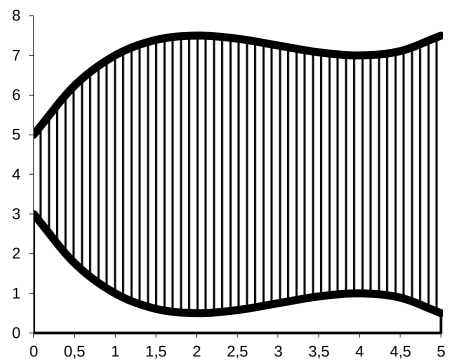
Der Sandkasten der Kita ÖMMES UND OIMEL, siehe Skizze rechts, hat die Form eines stilisierten Fisches. Er ist bis zu einer Tiefe von 50 cm mit Sand gefüllt, der nun ausgetauscht werden soll. Die Leiterin der KiTa muss bestimmen, wie viel Sand hierzu bestellt werden muss. Dazu muss das Volumen des Sandes berechnet werden, der in den Sandkasten passt. Das Volumen kann man mit der Volumenformel $V = G \cdot h$, wobei h die Höhe (in unserem Fall 50 cm) und G den Inhalt der Grundfläche angibt. Die Grundfläche in unserem Fall die fischförmige Sandkastenoberfläche.



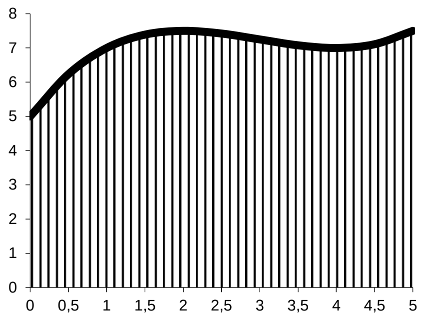
Um deren Inhalt zu berechnen, hat die Leiterin der KiTa die Oberfläche des Sandkastens in die maßstabsgerechte Zeichnung links übertragen. Alle Einheiten sind in Metern angegeben. Die obere und untere Begrenzung entsprechen den Graphen zweier Funktionen f und g, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

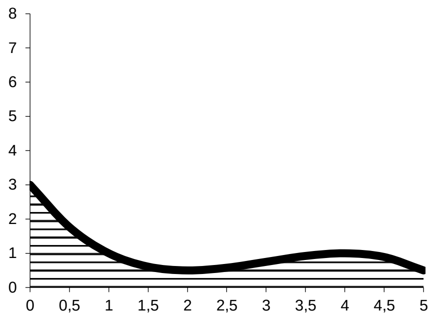
- $f(x) = 0{,}125x^3 - 1{,}125x^2 + 3x + 5$
- $g(x) = -0{,}125x^3 + 1{,}125x^2 - 3x + 3$.

Zu berechnen ist der Inhalt der über dem Intervall $0 \le x \le 5$ zwischen den beiden Graphen liegenden Fläche, siehe Skizze rechts.



Diese Fläche ist die Differenz aus der Fläche unter der Funktion f (Skizze unten links) und der Fläche unter der Funktion g (Skizze unten rechts).





Die beiden Flächen können mithilfe der jeweiligen Integrale berechnet werden. Für den gesuchten Flächeneinhalt A gilt also

$$A = \int_0^5 f(x)dx - \int_0^5 g(x)dx = \int_0^5 \left(f(x) - g(x)\right)dx \,.$$

Es wird also die „obere“ Funktion von der „unteren“ Funktion abgezogen. Dan wird diese Differenz integriert. Diese Regel gilt ganz allgemein.

Satz. Liegt für $a \le x \le b$ der Graph von f nie unter dem Graphen von g, dann kann der Inhalt A der Fläche zwischen den beiden Graphen mit der Formel

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

berechnet werden.

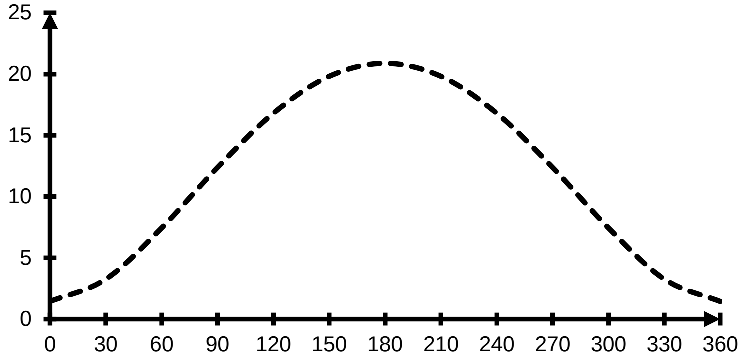
Für den Sandkasten der KiTa ÖMMES UND OIMEL ergibt sich

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^5 \left(f(x) - g(x)\right)dx \\
&= \int_0^5 \left(0{,}125x^3 - 1{,}125x^2 + 3x + 5 - \left(-0{,}125x^3 + 1{,}125x^2 - 3x + 3\right)\right)dx \\
&= \int_0^5 \left(0{,}25x^3 - 2{,}25x^2 + 6x + 2\right)dx \\
&= \left[0{,}0625x^4 - 0{,}75x^3 + 3x^2 + 2x\right]_0^5 \\
&= 30{,}3125
\end{aligned}$$

Das Volumen des Sandkastens ist also $V = 30{,}3125 \cdot 0{,}5 = 15{,}15325\text{m}^3$ → *Übung 1*

3. Anwendung 2: Mittelwerte

Nach Aufzeichnungen eines Wetterdienstes haben sich die um 12 Uhr jeden Tag gemessenen Temperaturen an einem Ort im Lauf eines Jahres gemäß der unten abgebildeten Kurve entwickelt. Hierbei wurde – der Einfachheit halber – das Jahr mit 360 Tagen und jeder Monat mit 30 Tagen angenommen.

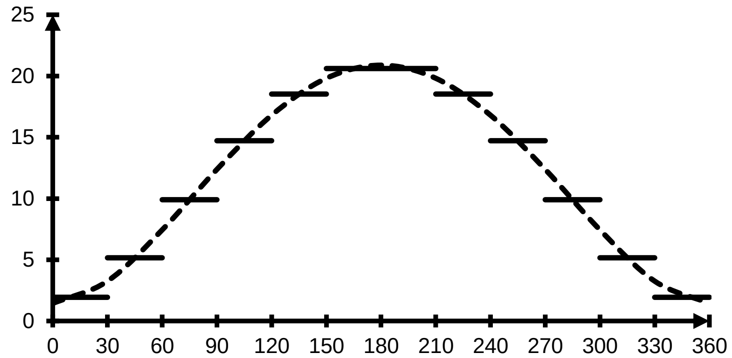


Wir nehmen an: Die Temperaturkurve entspricht im Intervall $0 \leq x \leq 360$ dem Graphen der durch

$$f(x) = \frac{0{,}001}{54000}x^4 - \frac{0{,}04}{3000}x^3 + 0{,}0024x^2 + 1{,}44$$

gegebenen Funktion. Wir wollen die mittägliche Durchschnittstemperatur dieses Ortes berechnen. Hierfür müssen die 360 Tagestemperaturen addiert und das Ergebnis durch 360 geteilt werden. Dies ist sehr aufwändig! Geht es nicht einfacher?

Versuchsweise tun wir zunächst so, als wären die Temperaturen in jedem einzelnen Monat konstant dem Wert, der für den jeweils mittleren (also fünfzehnten) Tag des Monats gemessen wurde:



Im Januar: Jeden Tag (also dreißig mal) Temperatur $f(15)$; im Februar: Jeden Tag (also 30 mal) Temperatur $f(45)$, ..., im Dezember: Jeden Tag (also 30 mal) Temperatur $f(345)$ Für den Jahresmittelwert ergibt sich dann folgender ungefährer Wert:

$$\begin{aligned} M_{30} &= \frac{1}{360}\cdot\big(f(15)\cdot 30 + f(45)\cdot 30 + f(75)\cdot 30 + f(105)\cdot 30 + f(135)\cdot 30 + f(165)\cdot 30 \\ &= \qquad + f(195)\cdot 30 + f(225)\cdot 30 + f(255)\cdot 30 + f(285)\cdot 30 + f(315)\cdot 30 + f(345)\cdot 30\big) \\ &= 11{,}8084375 \end{aligned}$$

Es fällt auf: Der Term in der Klammer ist nichts anderes, als eine Riemannsche Summe für die Funktion f für $0 \leq x \leq 360$ bei Zerlegung in 12 Teilintervalle.

Verkleinern wir die Bereiche, in denen wir die Temperatur als konstant annehmen, indem wir die Anzahl N der Teilintervalle immer weiter erhöhen, wird einerseits die Approximation immer genauer. Andererseits nähern sich die entstehenden Riemannschen Summen immer weiter dem Integral $\int_0^{360} f(x)\,dx$ an. Die mittägliche Durchschnittstemperatur ist also:

$$M = \frac{1}{360} \cdot \int_0^{360} f(x)dx \, .$$

Dies ist auch ganz allgemein so:

Satz. Ist die Funktion f stetig, dann ist $M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$ der **Mittelwert** von f für $a \le x \le b$.

Als Mittelwert der Temperaturen ergibt sich nun

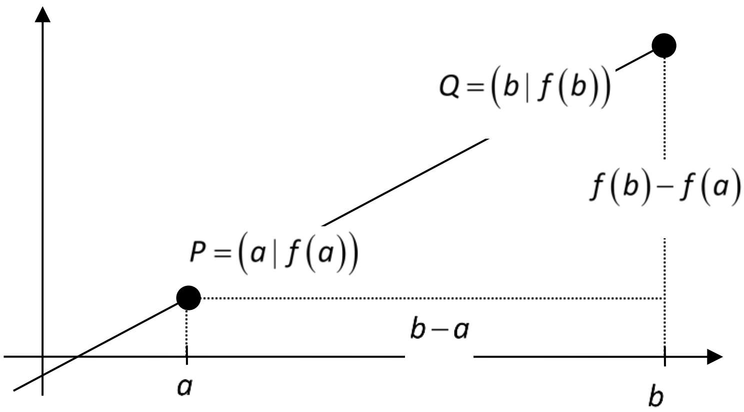
$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{360} \cdot \int_0^{360} \left(\frac{0,001}{54000} x^4 - \frac{0,04}{3000} x^3 + 0,0024x^2 + 1,44 \right) dx \\ &= \frac{1}{360} \cdot \left[\frac{0,001}{270000} x^5 - \frac{0,01}{3000} x^4 + 0,0008x^3 + 1,44x \right]_0^{360} \\ &= 11,808 \end{aligned}$$

Die Durchschnittstemperatur ist also ungefähr 11,8 Grad.

→ *Übung 2*

4. Anwendung 3: Die Bogenlänge

Wie kann die Länge L des zwischen $x = a$ und $x = b$ liegenden Teil des Graphen einer Funktion f berechnet werden? Wenn f eine lineare Funktion ist, kann dies leicht mithilfe des Satzes von Pythagoras geschehen: In diesem Fall ist, siehe rechts, die Länge L der Strecke von P nach Q zu bestimmen. Nach dem Satz des Pythagoras gilt in dem eingezeichneten (Steigungs-) Dreieck



$$L^2 = (b-a)^2 + \left(f(b) - f(a)\right)^2,$$

woraus sich durch Wurzelziehen:

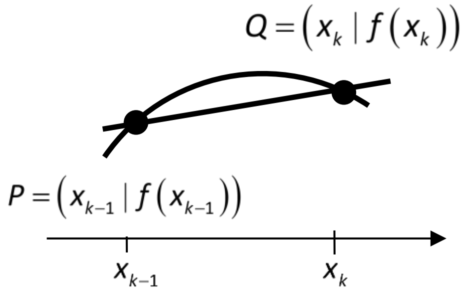
$$L = \sqrt{(b-a)^2 + \left(f(b) - f(a)\right)^2}$$

ergibt. Wenn man will, kann man hier noch etwas umformen:

$$L = \sqrt{(b-a)^2 + \left(f(b)-f(a)\right)^2} = \sqrt{(b-a)^2 \left(1 + \frac{\left(f(b)-f(a)\right)^2}{(b-a)^2} \right)} = \underline{\underline{(b-a) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)^2}}}$$

Dies ist die Länge der Strecke zwischen den Punkten $P = (a \,|\, f(a))$ und $Q = (b \,|\, f(b))$.

Wenn f eine beliebige Funktion ist, approximieren wir die Länge L, indem wir das Intervall $a \le x \le b$ durch Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ in jeweils gleich lange Teilintervalle $x_{k-1} \le x \le x_k$ zerlegen und dann, siehe Skizze rechts, zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Teilpunkten statt der Länge des Graphen die Länge der Verbindung die Länge der Sekante durch P und Q berechnen. Die Länge eines solchen Sekantenstücks ist – wie eben herausgefunden



$$(x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2}\ .$$

Der sogenannte Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass man eine Stelle z_k zwischen x_{k-1} und x_k finden kann, sodass $\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(z_k)$ ist. Zwischen x_{k-1} und x_k hat der Graph also ungefähr die Länge $(x_k - x_{k-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(z_k))^2}$.

Die Länge des Graphen zwischen a und b ist dann ungefähr die Summe dieser Werte:

$$L_N = (x_1 - x_0) \cdot \sqrt{1 + (f'(z_1))^2} + (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + (f'(z_2))^2} + \ldots + (x_N - x_{N-1}) \cdot \sqrt{1 + (f'(z_N))^2}$$

L_N ist nichts anderes als eine Riemannsche Summe für $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$! Durch die Erhöhung der Zahl N der Teilinterpunkte wird einerseits der Unterschied zwischen L_N und der tatsächlichen Länge des Graphen immer kleiner, und andererseits nähert sich L_N immer mehr dem Integral $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ an. Dies bedeutet:

Satz. Angenommen, die Funktion f ist für $a \le x \le b$ differenzierbar und die Ableitung f' ist stetig. Dann ist

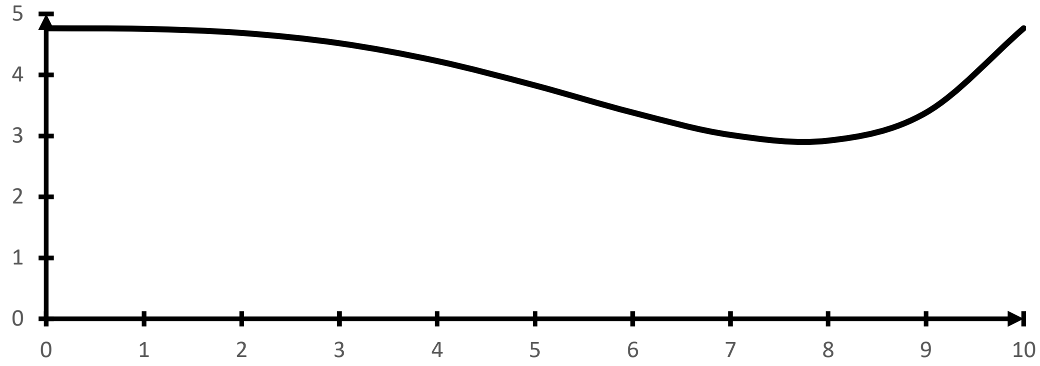
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

die Länge des Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$.

→ *Übung 3*

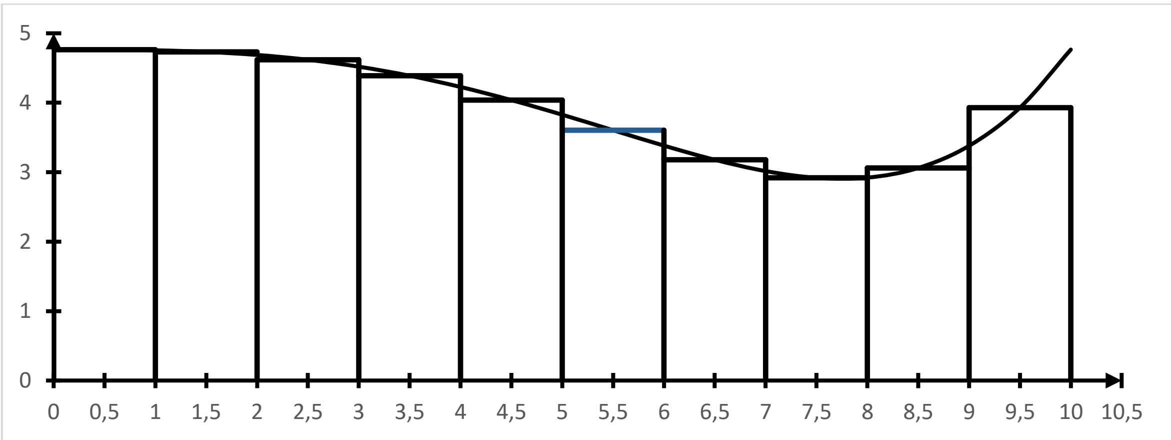
5. Anwendung 4: Rotationskörper

Eine Behindertenwerkstatt stellt Holzbecher her. Die Form der Holzbecher erhält man, wenn man den Graphen der durch $f(x) = 0{,}0001x^5 - 0{,}01x^3 + 4{,}765$ im Bereich von $x = 0$ bis $x = 10$ um die x-Achse rotieren lässt:



Hierbei sind alle Einheiten in cm angegeben. Einen Körper, der durch Rotation einer Kurve entsteht, nennt man auch **Rotationskörper**.

Um das Volumen dieses Rotationskörpers zu berechnen, schauen wir uns eine Approximation der Fläche zwischen Graph und Koordinatenachsen durch Rechtecke an:



Die entsprechende Riemannsche Summe ist

$$f(0{,}5)\cdot 1+f(1{,}5)\cdot 1+\ldots+f(8{,}5)\cdot 1+f(9{,}5)\cdot 1\,.$$

Das Volumen des Rotationskörpers erhält man näherungsweise, indem alle Rechtecke um die x-Achse rotieren lässt. Es entstehen 10 „Diskusscheiben“. Das Volumen jeder dieser Scheiben ist $V=G\cdot h$. Die Höhe ist dabei jeweils 1, die Grundfläche ist jeweils ein Kreis mit Radius $f(0{,}5),f(1{,}5),\ldots,f(9{,}5)$. Die Volumina dieser Diskusscheiben sind also

$$\underbrace{\pi\cdot\big(f(0{,}5)\big)^2}_{G}\cdot\underbrace{1}_{h},\underbrace{\pi\cdot\big(f(1{,}5)\big)^2}_{G}\cdot\underbrace{1}_{h},\ldots,\underbrace{\pi\cdot\big(f(9{,}5)\big)^2}_{G}\cdot\underbrace{1}_{h}$$

(Zur Erinnerung: Der Inhalt der Kreisfläche wird mit der Formel $\pi\cdot r^2$ berechnet) Das Volumen des Rotationskörpers ist also approximativ

$$\begin{aligned}V&\approx\pi\cdot\big(f(0{,}5)\big)^2\cdot 1+\pi\cdot\big(f(1{,}5)\big)^2\cdot 1+\ldots+\pi\cdot\big(f(8{,}5)\big)^2\cdot 1+\pi\cdot\big(f(9{,}5)\big)^2\cdot 1\\&=\pi\cdot\Big(\big(f(0{,}5)\big)^2\cdot 1+\big(f(1{,}5)\big)^2\cdot 1+\ldots+\big(f(8{,}5)\big)^2\cdot 1+\big(f(9{,}5)\big)^2\cdot 1\Big)\end{aligned}$$

In der Klammer steht hier eine Riemannsche Summe für die Funktion $\left(f(x)\right)^2$, die sich, wenn man die Anzahl der Rechtecke erhöht (also die Rechteckbreiten verkleinert) dem Integral $\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ annähert. Da das Verkleinern der Rechteckbreiten auch dazu führt, dass das Volumen immer genauer bestimmt wird, ergibt sich:

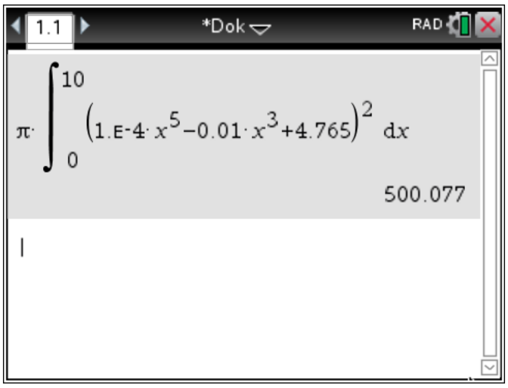
Satz. Das Volumen des Rotationskörpers, dessen Mantelfläche durch Rotation des Graphen der Funktion f im Bereich $a \le x \le b$ um die x-Achse entsteht, kann mit der Formel

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

berechnet werden.

Für die Becher der Behindertenwerkstatt ergibt sich mithilfe des GTR:

$$V = \pi \cdot \int_0^{10} \left(0{,}0001x^5 - 0{,}01x^3 + 4{,}765\right)^2 dx$$
$$= 500{,}077 \text{ cm}^3$$



Der Holzbecher fasst also (fast genau) einen halben Liter. Natürlich kann das Integral mithilfe einer Stammfunktion ohne GTR berechnet werden. Da der Integrand aber erst aufwändig ausmultipliziert werden muss, ist die Verwendung des GTR hier zweckmäßiger.

→ *Übung 4*

Übungen zur Lerneinheit *Anwendungen der Integralrechnung*

Übung 1.

1. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $a \leq x \leq b$ einschließen.

   a) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 3$, $g(x) = -2x^2 + 2x + 3$, $a = 1$, $b = 5$

   b) $f(x) = x^3 + 2x + 2$, $g(x) = 3x + 2$, $a = 0$, $b = 1$

   c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $a = 1$, $b = 4$

   d) $f(x) = 8x^4 - 5x^2 - 1$, $g(x) = x^5 - 2x - 1$, $a = 1$, $b = 5$

   e) $f(x) = -0{,}5x^3 + 4x^2 + 5$, $g(x) = \ln(x)$, $a = 1$, $b = 8$

   f) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = xe^{-x^2}$, $a = 0$, $b = 1$

2. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionsgraphen von f und g und berechnen Sie dann den Inhalt der Fläche, die zwischen den Schnittpunkten von den beiden Graphen eingeschlossen wird.

   a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 5{,}5$, $g(x) = x + 3$

   b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$, $g(x) = x^2 + 2x - 1$

   c) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, $g(x) = -x^2 + 7$

   d) $f(x) = 0{,}5x^4 - 6{,}5x^2 + 18$, $g(x) = -0{,}5x^4 + 6{,}5x^2 - 18$

Übung 2.

1. Für Open-Air-Veranstaltungen will die Stadt Bonn eine 120 Meter lange Freifläche ausweisen. Die nördliche Begrenzung der Freifläche kann dargestellt werden durch den im Bereich $0 \leq x \leq 120$ liegenden Teil des Graphen der Funktion f mit
$$f(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}0237x^2 + 1{,}368x + 11\,.$$
Die südliche Grenze entspricht dem im selben Bereich liegenden Teil des Graphen der Funktion g mit
$$g(x) = 0{,}01x^2 - 1{,}2x - 7{,}2\,.$$
Hierbei entsprechen eine x- und eine y-Einheit jeweils einem Meter. Die y-Achse weist nach Norden.

   a) Bestimmen Sie, für wie viele Menschen die Fläche höchstens freigegeben werden darf, wenn für zwei Menschen mindestens 1 m² zur Verfügung stehen muss.

   b) Neben dem Haupteingang an der der Westseite soll aus Sicherheitsgründen an der breitesten Stelle der Freifläche jeweils ein Notausgang an der Nord- und der Südseite angelegt werden. Berechnen Sie, wo dies ist.

   c) Bestimmen Sie auch die durchschnittliche Breite der Freifläche.

2. Hühnereier aus biologischer Haltung werden mehr und mehr nachgefragt. Neben vielen anderen Bedingungen verlangt das Prädikat „aus biologischer Landwirtschaft", dass die Hühner frei laufen können, wobei für jedes Tier mindestens 4 m² Fläche zur Verfügung stehen müssen. Ein Landwirt plant, auf einem freien Gelände Hühner zu halten, um dort

nach Bio-Kriterien Hühnereier zu produzieren. Das Gelände kann mathematisch modelliert werden als die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen mit den Gleichungen

$$f(x) = -0{,}019x^2 + 1{,}52x + 5$$

(Nordbegrenzung) und

$$g(x) = -0{,}0005x^3 + 0{,}0525x^2 - 0{,}9x + 5$$

(Südbegrenzung). Hierbei entspricht eine Längeneinheit einem Meter. Die y-Achse weist nach Norden.

a) Bestimmen Sie, wie viele Hühner der Bauer auf der Fläche halten darf.

b) Dort, wo der Abstand von Nord- zu Südbegrenzung am größten ist, soll genau in der Mitte zwischen beiden Begrenzungen ein Unterstand mit Futterstation errichtet werden. Berechnen Sie, wo der Unterstand gebaut werden muss.

c) Bestimmen Sie auch den durchschnittlichen Abstand von Nord- zu Südbegrenzung.

3. Die jährliche Anzahl der in den städtischen Kindertagesstätten beschäftigten Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter einer mittelgroßen Stadt von 1990 bis 2020 kann näherungsweise mithilfe der durch

$$f(x) = -0{,}004x^3 + 0{,}12x^2 - 0{,}8x + 208$$

gegebenen Funktion bestimmt werden. Dabei entspricht $x = 0$ dem Jahr 1990 und $x = 30$ dem Jahr 2020.

a) Untersuchen Sie die Entwicklung der Mitarbeiterzahlen der Jahre von 1990 bis 2020, indem Sie die größte und die kleinste Mitarbeiteranzahl berechnen und indem Sie bestimmen, in welchen Jahren die Mitarbeiterzahl am stärksten zunahm und am stärksten abnahm.

b) Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche Mitarbeiterzahl von 1990 bis 2020.

Übung 3.

1. Beim Fußballspielen der Jugendgruppe in der Turnhalle schießt Ben den Ball quer durch die Halle. Die Flugkurve kann mit Hilfe der durch

$$f(x) = -0{,}00625x^3 + 0{,}1125x^2$$

gegebenen Funktion modelliert werden, wobei x und $f(x)$ in Metern gemessen werden.

a) Jeder, der einen Ball an die Hallendecke schießt, muss 50 Cent Strafe in die Gruppenkasse zahlen. Untersuchen Sie, ob Ben etwas zahlen muss. Die Halle ist 6 Meter hoch.

b) Berechnen Sie, wie weit der Ball fliegt, bei welcher Entfernung er am stärksten steigt und wie groß die durchschnittliche Flughöhe ist.

c) Ermitteln Sie die mithilfe des GTR die Länge der Strecke, die der Ball in der Luft zurücklegt.

2. Für Open-Air-Veranstaltungen will die Stadt Bonn eine 120 Meter lange Freifläche ausweisen. Die nördliche Begrenzung der Freifläche kann dargestellt werden durch den im Bereich $0 \le x \le 120$ liegenden Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}0237x^2 + 1{,}368x + 11\,.$$

Die südliche Grenze entspricht dem im selben Bereich liegenden Teil des Graphen der Funktion g mit

$$g(x)=0{,}01x^2-1{,}2x-7{,}2\,.$$

Hierbei entsprechen eine x- und eine y-Einheit jeweils einem Meter. Die y-Achse weist nach Norden.

Das Open-Air-Gelände soll mit einem Zaun eingefriedet werden, dessen Errichtung 28,50 € je Meter kostet. Ermitteln Sie mithilfe des GTR, mit welchen Kosten zu rechnen ist.

3. Ein Freigelände, auf dem ein Landwirt nach Bio-Kriterien Hühnereier produzieren will, kann mathematisch modelliert werden als die zwischen $x=0$ und $x=55$ liegende Fläche zwischen den Graphen der Funktionen mit den Gleichungen
$$f(x)=-0{,}019x^2+1{,}52x+5$$
(Nordbegrenzung) und
$$g(x)=-0{,}0005x^3+0{,}0525x^2-0{,}9x+5$$
(Südbegrenzung). Hierbei entspricht eine Längeneinheit einem Meter. Die y-Achse weist nach Norden.
Das Gelände soll mit einem Zaun eingefriedet werden, dessen Errichtung 25 € je Meter kostet. Ermitteln Sie mithilfe des GTR, mit welchen Kosten der Landwirt rechnen muss.

4. Der Verlauf der Küste zwischen zwei Häfen am Nordfriesischen Wattenmeer kann näherungsweise dargestellt werden durch den Teil des Graphen der Funktion f mit
$$f(x)=-x^3+6x^2-9x+4\,,$$
der zwischen seinem Schnittpunkt S mit der y-Achse und seinem Hochpunkt H liegt. Hierbei entspricht eine Längeneinheit 2,5 km.
   a) Berechnen Sie die Koordinaten von S und H.
   b) Ermitteln Sie mithilfe des GTR die Länge des Küstenstreifens.
   c) Zwischen S und H befindet sich am Tiefpunkt T des Graphen von f ein beliebter Ferienort. Der Tourismusverein überlegt, von hier aus Tagestouren mit Wattwagen zum nächstgelegenen Punkt auf einer vorgelagerten Insel anzubieten. Die Küstenlinie der Insel kann im in Frage kommenden Bereich ungefähr durch den Graphen der durch
   $$g(x)=0{,}1x^2+0{,}2x+5$$
   gegebenen Funktion beschrieben werden. Skizzieren Sie die Graphen von f und g für $0\le x\le 4$ in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie dann unter der Annahme, dass die Wagen eine gerade Strecke fahren können, die Länge der Fahrstrecke.
   d) Der heutige Küstenverlauf unterscheidet sich von dem Küstenverlauf in früheren Jahrhunderten. Die damalige Küstenlinie zwischen T und H kann beschrieben werden mithilfe der durch
   $$h(x)=x^2-2x+1$$
   gegebenen Funktion. Untersuchen Sie, ob es durch die Veränderung der Küstenlinie zu einem Landgewinn oder einem Landverlust kam, und berechnen Sie, wie hoch dieser war.

5. Der Querschnitt durch ein Tal in der Eifel von West nach Ost kann näherungsweise beschrieben werden durch den zwischen $x=-4$ und $x=3$ liegenden Teil des Graphen der Funktion f mit
$$f(x)=0{,}125x^3+0{,}75x^2-3\,.$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit 50 m. Dieser Querschnittslinie folgt ein Bergwanderweg.

a) Zeichnen Sie den Querschnitt des Tales.
b) Berechnen Sie das größte Gefälle und die größte Steigung des Bergwanderwegs.
c) Ermitteln Sie mithilfe des GTR die Länge des Bergwanderwegs. Bestimmen Sie auch, nach wie vielen Kilometern das größte Gefälle und nach wie vielen Kilometern der tiefste Punkt des Bergwanderwegs erreicht werden.
d) Entlang des Bergwanderwegs soll für eine neue Talsperre eine Staumauer errichtet werden, die vom tiefsten Punkt des Tales aus gemessen 150 m hoch ist. Bestimmen Sie die Breite der geplanten Staumauer an der Oberkante.
e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der geplanten Staumauer.
f) Hinter der geplanten Staumauer erstreckt sich das Tal noch weitere 400 m mit im Wesentlichen unveränderten Querschnitt und endet dann an einer nahezu senkrechten Bergwand. Berechnen Sie das Fassungsvermögen der geplanten Talsperre.

6. Eine Bürgerinitiative protestiert gegen den Bau eines Stausees in den Alpen. Um fundiert argumentieren zu können, studieren die Aktivisten die vom Freistaat Bayern veröffentlichten Pläne des Stausee-Projekts.
Der Querschnitt des Tals, das durch den Bau einer Staumauer zum Wasserbecken des Stausees werden soll, kann näherungsweise durch die Funktion f mit
$$f(x) = -\frac{15}{64}x^3 + \frac{115}{64}x^2 - \frac{25}{8}x + \frac{8}{5}$$
beschrieben werden, wobei eine Längeneinheit 50 m entspricht. Dabei beginnt die Krone der Staumauer im Hochpunkt des Graphen und endet in gleicher Höhe auf der gegenüberliegenden Tal-Seite.
   a) Berechnen Sie die Länge der Krone der Staumauer.
   b) Das Tal hat eine Länge von 2 km und schließt dann mit einer nahezu senkrechten Felswand ab. Sein Querschnitt bleibt auf die gesamte Länge im Wesentlichen unverändert. Bestimmen Sie, wie viel Wasser das Staubecken fassen wird.
   c) Die Staumauer ist im Schnitt 8 m dick. 80 % ihres Volumens wird aus Beton bestehen. Der Beton soll von Lkws, die 15 t laden können, zur Baustelle gebracht werden. Ermitteln Sie, wie viele Lkw-Fahrten zur Baustelle nötig sind, wenn 1 m³ Beton 2.400 kg wiegen.

Übung 4.

1. Eine Kaffeebohne ähnelt dem Rotationskörper, der entsteht, wenn die Parabel mit der Gleichung
$$f(x) = -\frac{1}{6}x \cdot (x-7)$$
zwischen den Nullstellen um die x-Achse rotiert. Hierbei werden x und $f(x)$ in Millimetern gemessen. Berechnen Sie ggf. mithilfe des GTR das Volumen der Kaffeebohne.

2. Die Mantelfläche eines 80 m hohen, runden Kühlturms eines Kraftwerks kann modelliert werden durch Rotation des zwischen $x=0$ und $x=8$ liegenden Teils des Graphen der Funktion f mit

$$f(x)=0{,}01x^3-0{,}09x^2+3$$

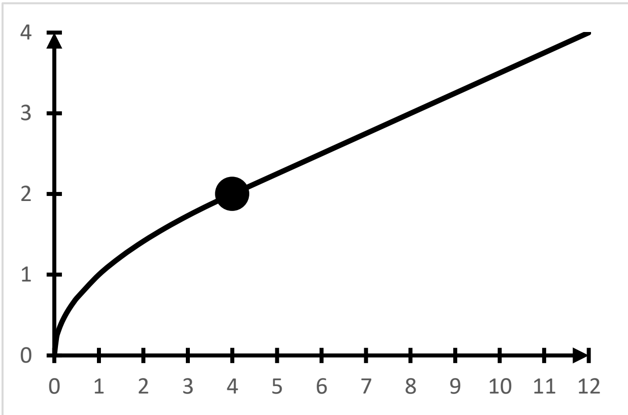
um die x-Achse. Hierbei entspricht eine Einheit 10 m.

   a) Stellen Sie mithilfe des GTR die Funktion f graphisch dar.
   b) Ermitteln Sie, in welcher Höhe der Turm den kleinsten Umfang hat, und berechnen Sie den Umfang in dieser Höhe.
   c) Berechnen Sie ggf. mithilfe des GTR das Volumen des Kühlturms.
   d) Die Wandstärke des Kühlturms beträgt 0,5 m. Bestimmen Sie das Volumen der Wand.

3. Der Kelch eines Weinglases entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse, wobei f wie folgt gegeben ist:

- Für $0 \le x \le 4$ ist $f(x)=\sqrt{x}$.
- Für $4 \le x \le 12$ stimmt $f(x)$ mit der an der Stelle 4 an den Graphen der Funktion $g(x)=\sqrt{x}$ gezeichneten Tangente überein.

Eine Längeneinheit entspricht hierbei 1 cm.



   a) Überprüfen Sie, dass die Tangente die Gleichung $t(x)=0{,}25x+1$ hat.
   b) Das Weinglas wird bis zur Höhe $x=4$ mit Wein gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Liter Wein im Glas sind. (1 Liter sind 1.000 cm³)
   c) Berechnen Sie, wie viel Liter Wein sich im Glas befinden, wenn das Glas bis zur Höhe $x=5$, $x=8$ bzw. $x=12$ gefüllt wird.
   d) Weisen Sie nach, dass das Flüssigkeitsvolumen in Abhängigkeit von der Einfüllhöhe x für $4 \le x \le 12$ berechnet werden kann mithilfe der durch
$$V(x)=\pi\cdot\left(\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{4}x^2+x-\frac{4}{3}\right)$$
gegebenen Funktion.
   e) Das Weinglas soll einen Eichstrich bei der Füllhöhe 250 ml bekommen. Berechnen Sie mithilfe des GTR, in welcher Höhe der Eichstrich gesetzt werden muss.

Lösungen der Übungen zur Lerneinheit
Anwendungen der Integralrechnung

Übung 1.

1. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $a \le x \le b$ einschließen.

   a) $\int_1^5 \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_1^5 \left(-x^3+6x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3\right]_1^5 = 92$

   b) $\int_0^1 \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_0^1 \left(-x^3+x\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 0{,}25$

   c) $\int_1^4 \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_1^4 \left(-x^3+6x^2-9x+4\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-\frac{9}{2}x^2+4x\right]_1^4 = \frac{27}{4}$

   d) $\int_1^5 \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_1^5 \left(-x^5+8x^4-5x^2+2x\right)dx$

   $= \left[-\frac{1}{6}x^6+\frac{8}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+x^2\right]_1^5 = \frac{33.176}{15}$

   e) $\int_1^8 \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_1^8 \left(-0{,}5x^3+4x^2+5-\ln(x)\right)dx$

   $= \left[-\frac{0{,}5}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+5x-\left(x\cdot\ln(x)-x\right)\right]_1^4 = 194{,}823$

   f) $\int_0^1 \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_0^1 \left(e^{-x}-x\cdot e^{-x^2}\right)dx = \left[-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = 0{,}316$

2. a) Schnittstellenberechnung:

   $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 0{,}5x^2-2x+5{,}5=x+3 \Leftrightarrow 0{,}5x^2-3x+2{,}5=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$

   Integration zwischen den Schnittstellen:

   $\int_1^5 \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_1^5 \left(0{,}5x^2-3x+2{,}5\right)dx = \left[\frac{0{,}5}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2{,}5x\right]_1^5 = -5\frac{1}{3}$

   Flächeninhalt: $5\frac{1}{3}$ Flächeneinheiten

   b) Schnittstellenberechnung:

   $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x^2-3x+3=x^2+2x-1 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4$

   Integration zwischen den Schnittstellen:

   $\int_1^4 \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_1^4 \left(x^2-5x+4\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_1^4 = -4{,}5$

   Flächeninhalt: $4{,}5$ Flächeneinheiten

   c) Schnittstellenberechnung:

   $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^4-4x^2+3=-x^2+7 \Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

   (Substitutionsverfahren)

Integration zwischen den Schnittstellen:

$$\int_{-2}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(x^4-3x^2-4\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right]_{-2}^{2}=-19{,}2$$

Flächeninhalt: 19,2 Flächeneinheiten

d) Schnittstellenberechnung:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 0{,}5x^4-6{,}5x^2+18=-0{,}5x^4+6{,}5x^2-18\Leftrightarrow x^4-13x^2+36=0$$

$$\Leftrightarrow x=-3\vee x=-2\vee x=2\vee x=3$$

(Substitutionsverfahren)

Integration zwischen den Schnittstellen:

$$\int_{-3}^{-2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-3}^{-2}\left(x^4-13x^2+36\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{13}{3}x^3+36x\right]_{-3}^{-2}=-\frac{62}{15}$$

$$\int_{-2}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(x^4-13x^2+36\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{13}{3}x^3+36x\right]_{-2}^{2}=\frac{1312}{15}$$

$$\int_{2}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{2}^{3}\left(x^4-13x^2+36\right)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{13}{3}x^3+36x\right]_{2}^{3}=-\frac{62}{15}$$

Flächeninhalt: $\frac{62}{15}+\frac{1312}{15}+\frac{62}{15}=\frac{1436}{15}\approx 95{,}733$ Flächeneinheiten

Übung 2.

1. a) Der Inhalt der Fläche zwischen den beiden Graphen zwischen $x=0$ und $x=120$ ist

$$\begin{aligned}\int_{0}^{120}\left(f(x)-g(x)\right)dx &= \int_{0}^{120}\left(0{,}0001x^3-0{,}0337x^2+2{,}568x+18{,}2\right)dx\\ &= \left[\frac{0{,}0001}{4}x^4-\frac{0{,}0337}{3}x^3+1{,}284x^2+18{,}2x\right]_{0}^{120}\\ &= 6446{,}4\text{ m}^2\end{aligned}$$

Die Fläche darf also für $6446{,}4\cdot 2=12892{,}8\approx 12893$ Menschen freigegeben werden.

b) Der Abstand zwischen Nord- und Südbegrenzung bei Länge x wird mithilfe der durch

$$B(x)=f(x)-g(x)=0{,}0001x^3-0{,}0337x^2+2{,}568x+18{,}2$$

gegebenen Funktion berechnet. Der größte Abstand zwischen $x=0$ und $x=120$ kann aus dem Hochpunkt dieser Funktion ausgelesen werden.

Ableitungen:

- $B'(x)=0{,}0003x^2-0{,}0674x+2{,}568$
- $B''(x)=0{,}0006x-0{,}0674$

Kritische Stellen: $x=48{,}624$, $x=176{,}042$

Extrempunkte:

- $B''(48{,}624)=-0{,}038\Rightarrow H(48{,}624|74{,}886)$
- $B''(176{,}042)=0{,}038\Rightarrow T(176{,}042|-28{,}546)$

Der Abstand ist bei 48,624 m am größten. Er beträgt 74,886 m. Um die genaue Lage der Notausgänge zu bestimmen, müssen die y-Koordinaten von f und g an der Stelle $x = 48{,}624$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f(48{,}624) &= 32{,}98 \\ g(48{,}624) &= -41{,}906 \end{aligned}$$

Der nördliche Notausgang liegt also bei $(48{,}624|32{,}98)$ und der südliche Notausgang bei $(48{,}624|-41{,}906)$.

c) Die durchschnittliche Breite der Freifläche ist

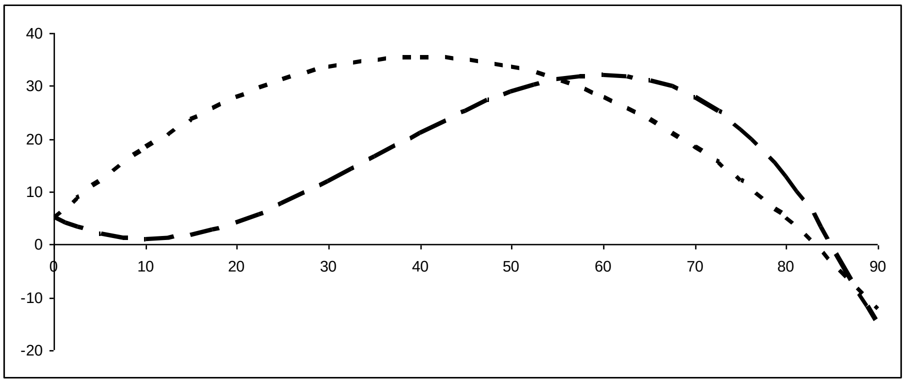
$$\frac{1}{120-0} \cdot \int_0^{120} B(x)dx = \frac{1}{120} \cdot \int_0^{120} (f(x)-g(x))dx = \frac{1}{120} \cdot 6446{,}4 = 53{,}72 \text{ m.}$$

2. a) Es werden zuerst die Schnittstellen der beiden Funktionen bestimmt:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \cdot (0{,}0005x^2 - 0{,}0715x + 2{,}42) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 55, x = 87{,}5$$

Wertetabelle und Skizze:

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f(x)$	5	18,3	27,8	33,5	35,4	33,5	27,8	18,3	5	-12,1
$g(x)$	5	0,75	4	11,75	21	28,75	32	27,75	13	-15,25



Da der Graph von f die Nordgrenze bildet und die y-Achse nach Norden weist, kommt für die zu betrachtende Fläche nur die zwischen $x = 0$ und $x = 55$ liegende Fläche zwischen den beiden Graphen infrage. Der Inhalt dieser Fläche ist

$$\begin{aligned} \int_0^{55} (f(x)-g(x))dx &= \int_0^{55} (0{,}0005x^3 - 0{,}0715x^2 + 2{,}42x)dx \\ &= \frac{0{,}0005}{4}x^4 - \frac{0{,}0715}{3}x^3 + 1{,}21x^2 \Big|_0^{55} \\ &= 838{,}807 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Damit darf der Landwirt $838{,}807 : 4 = 209{,}7 \approx 210$ Hühner auf der Fläche halten.

b) Der Abstand zwischen Nord- und Südbegrenzung bei Länge x wird mithilfe der durch

$$B(x) = f(x) - g(x) = 0{,}0005x^3 - 0{,}0715x^2 + 2{,}42x$$

gegebenen Funktion berechnet. Der größte Abstand zwischen $x = 0$ und $x = 55$ kann aus dem Hochpunkt dieser Funktion ausgelesen werden.
Ableitungen:

- $B'(x) = 0{,}0015x^2 - 0{,}143x + 2{,}42$
- $B''(x) = 0{,}003x - 0{,}143$

Kritische Stellen: $x = 22$, $x = 73{,}\overline{3}$

Extrempunkte:

- $B''(22) = -0{,}077 \Rightarrow H(22|23{,}958)$
- $B''(73{,}\overline{3}) = 0{,}077 \Rightarrow T(73{,}\overline{3}|-9{,}859)$

Der Abstand ist bei 22 m am größten. Er beträgt 23,958 m. Um die y -Koordinate des Unterstands zu bestimmen, muss deshalb zu $g(22) = 5{,}286$ die Hälfte von 23,958 hinzu addiert werden:

$g(22) + \frac{1}{2}B(22) = 17{,}265$.

c) Der durchschnittliche Abstand von Nord- zu Südbegrenzung ist

$$\frac{1}{55-0} \cdot \int_0^{55} d(x)dx = \frac{1}{55} \cdot \int_0^{55} \left(f(x) - g(x)\right)dx = \frac{1}{55} \cdot 838{,}807 = 15{,}251 \text{ m.}$$

3. a) Ableitungen

$f'(x) = -0{,}012x^2 + 0{,}24x - 0{,}8$

$f''(x) = -0{,}024x + 0{,}24$

$f'''(x) = -0{,}024$

HP/TP

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}012x^2 + 0{,}24x - 0{,}8 = 0 \,\big|\, :(-0{,}012) \Leftrightarrow x^2 - 20x + 66{,}667 =$

$\Leftrightarrow x_1 = 15{,}773, x_2 = 4{,}227$

$f''(15{,}773) = -0{,}139 < 0 \Rightarrow \text{HP}(15{,}773|209{,}54)$

$f''(4{,}227) = 0{,}139 < 0 \Rightarrow \text{TP}(4{,}227|206{,}46)$

Überprüfen mit den Randwerten $f(0) = 208$ sowie $f(30) = 184$ zeigt, dass die größte Mitarbeiterzahl in der Tat rund 210 war (im Jahr $1990 + 15{,}773 = 2005{,}773 \approx 2006$). Die kleinste Mitarbeiterzahl lag dagegen 2010 vor mit 184.

WP

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}024x + 0{,}24 = 0 \Leftrightarrow x = 10$

$f'''(10) = -0{,}024 < 0 \Rightarrow LRW(10|208);\ f'(10) = 0{,}4$

Überprüfen mit den Randwerten $f'(0) = -0{,}8$ sowie $f'(30) = -4{,}4$ ergibt, dass die stärkste Zunahme der Mitarbeiter bei $x = 10$, also im Jahr 2000 zu verzeichnen war, während die stärkste Abnahme im Jahr 2030 vorlag.

b) $$\frac{1}{30-0} \cdot \int_0^{30} f(x)dx = \left[-0{,}001x^4 + 0{,}04x^3 - 0{,}4x^2 + 208x\right]_0^{30} = \frac{1}{30} \cdot 6150 = 205$$

Die durchschnittliche jährliche Mitarbeiterzahl von 1990 bis 2020 betrug 205.

Übung 3.

1. a) Um zu bestimmen, wie hoch der Ball fliegt, ist der Hochpunkt von f zu bestimmen.
   Ableitungen:
   - $f'(x) = -0{,}01875x^2 + 0{,}225x$
   - $f''(x) = -0{,}0375x + 0{,}225$

   Kritische Stellen: $x = 12$, $x = 176{,}042$
   Extrempunkte:
   - $f''(0) = 0{,}225 > 0 \Rightarrow T(0|0)$
   - $f''(12) = -0{,}225 < 0 \Rightarrow H(12|5{,}4)$

   Der Ball fliegt also 5,4 m hoch und erreicht deshalb die Hallendecke nicht. Florian muss also nichts zahlen.

   b) Um zu berechnen, wie weit der Ball fliegt, werden die Nullstellen von f bestimmt:
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (-0{,}00625x + 0{,}1125) \Leftrightarrow x = 0, = 18$.
   Der Ball fliegt also 18 m weit. Die durchschnittliche Flughöhe ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{18-0} \cdot \int_0^{18} f(x)dx &= \frac{1}{18} \cdot \int_0^{120} \left(-0{,}00625x^3 + 0{,}1125x^2\right)dx \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left[-\frac{0{,}00625}{4}x^4 + \frac{0{,}1125}{3}x^3\right]_0^{18} \\ &= 3{,}0375\end{aligned}$$

   Meter. Der stärkste Anstieg kann aus dem Links-Rechts-Wendepunkt ausgelesen werden:
   Ableitungen:
   - $f''(x) = -0{,}0375x + 0{,}225$
   - $f'''(x) = -0{,}0375$

   Nullstellen der zweiten Ableitung: $x = 6$
   Wendepunkt:
   - $f'''(6) = -0{,}0375 < 0 \Rightarrow \text{LRW}(6|2{,}7)$

   Der stärkste Anstieg der Flugbahn ist bei einer Entfernung von 6 Metern. Der Ball ist dort 2,7 Meter hoch.

   c) Die Länge L ergibt sich aus der Länge des Graphen zwischen den beiden Nullstellen:

$$L = \int_0^{18} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^{18} \sqrt{1 + \left(-0{,}01875x^2 + 0{,}225x\right)^2}\, dx = 21{,}86 \text{ Meter.}$$

2. Die Länge L_N der Nordbegrenzung berechnet sich als Länge des Graphen von f zwischen $x = 0$ und $x = 55$:

$$L_N = \int_0^{55} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_0^{55} \sqrt{1 + \left(-0{,}038x + 1{,}52\right)^2}\, dx = 68{,}03 \text{ m.}$$

   Die Länge L_S der Südbegrenzung berechnet sich als Länge des Graphen von g zwischen $x = 0$ und $x = 55$:

$$L_S = \int_0^{55} \sqrt{1+\left(g'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^{55} \sqrt{1+\left(-0{,}0015x^2+0{,}105x-0{,}9\right)^2}\,dx = 66{,}28 \text{ m.}$$

Die Länge der Begrenzung ist damit 134,31 m, sodass mit Kosten von 3.357,75 € zu rechnen ist.

3. Die Länge L_N der Nordbegrenzung berechnet sich als Länge des Graphen von f zwischen $x=0$ und $x=120$:

$$L_N = \int_0^{120} \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^{120} \sqrt{1+\left(0{,}0003x^2-0{,}0474x+1{,}368\right)^2}\,dx = 133{,}68 \text{ m.}$$

Die Länge L_S der Südbegrenzung berechnet sich als Länge des Graphen von g zwischen $x=0$ und $x=120$:

$$L_S = \int_0^{120} \sqrt{1+\left(g'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^{120} \sqrt{1+\left(0{,}02x-1{,}2\right)^2}\,dx = 144{,}52 \text{ m.}$$

Hinzu kommt die Länge der westlichen und östlichen Begrenzungen:

- westliche Begrenzung: $B(0)=18{,}2$
- östliche Begrenzung: $B(120)=13{,}88$,

wobei $B(x)=f(x)-g(x)$ ist. Der Zaun muss damit insgesamt eine Länge von

$$133{,}68+144{,}52+18{,}2+13{,}88=310{,}28$$

Metern haben und kostet somit $310{,}28\cdot 28{,}50=8842{,}98$ €.

4. a) Natürlich ist $S=(0|4)$.

Ableitungen:

- $f'(x)=-3x^2+12x-9$
- $f''(x)=-6x+12$

Kritische Stellen: $x=1$, $x=3$

Überprüfen der zweiten Ableitung:

- $f''(1)=6>0 \Rightarrow T(1|0)$
- $f''(3)=-6<0 \Rightarrow H(3|4)$

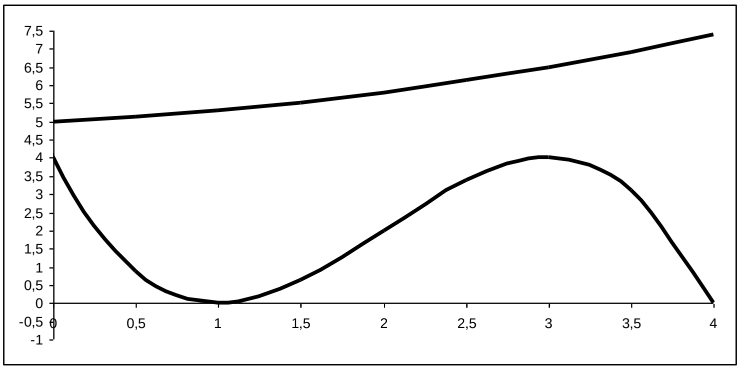
b) Um die Länge des Küstenstreifens zwischen den Häfen zu bestimmen, muss die Länge L des Graphen zwischen $x=0$ und $x=3$ berechnet werden:

$$L = \int_0^{3} \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^{3} \sqrt{1+\left(-3x^2+12x-9\right)^2}\,dx = 8{,}81 \text{ Längeneinheiten,}$$

also rund 22 km.

c) Wertetabelle und Graph

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$g(x)$	5	5,125	5,3	5,525	5,8	6,125	6,5	6,925	7,4



Der Abstand zwischen $T(1|0)$ und einem Punkt $I(x|g(x))$ auf der Küstenlinie der Insel wird berechnet durch

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(1-x)^2+(0-g(x))^2} \\ &= \sqrt{(1-x)^2+\left(0-\left(0{,}1x^2+0{,}2x+5\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{0{,}01x^4+0{,}04x^3+2{,}04x^2+26} \end{aligned}$$

Damit $I(x|g(x))$ den kleinsten Abstand zu $T(1|0)$ hat, muss x so gewählt werden, dass $d(x)$ kleinstmöglich ist. Hierzu werden die Extremstellen berechnet:

$$d'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{0{,}01x^4+0{,}04x^3+2{,}04x^2+26}}\cdot\left(0{,}04x^3+0{,}12x^2+4{,}08x\right)$$

Kritische Stellen: $d'(x)=0$, also

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{0{,}01x^4+0{,}04x^3+2{,}04x^2+26}}\cdot\left(0{,}04x^3+0{,}12x^2+4{,}08x\right)=0\,,$$

ist gleichbedeutend mit

$$0{,}04x^3+0{,}12x^2+4{,}08x=0\,,$$

da der Bruch $1\Big/\left(2\sqrt{0{,}01x^4+0{,}04x^3+2{,}04x^2+26}\right)$ nicht Null werden kann.

Aus $0{,}04x^3+0{,}12x^2+4{,}08x=x\cdot\left(0{,}04x^2+0{,}12x+4{,}08\right)$ ergibt sich, dass $x=0$ die einzige kritische Stelle ist. Aus dem Vorzeichenwechselkriterium ergibt sich, dass $(0|5{,}1)$ der Tiefpunkt von d ist. Der Punkt auf der Insel mit dem geringsten Abstand zu $T(1|0)$ ist also $I(0|g(0))=I(0|5)$. Die Länge der Fahrstrecke ist 5,1 Längeneinheiten, also 12,75 km.

d) Da sowohl f als auch h zwischen $x=1$ und $x=3$ nicht negativ sind, lassen sich die Landflächen in Küstennähe mithilfe der jeweiligen Integrale berechnen. Für die heutige Landfläche A_1 in Küstennähe ergibt sich

$$A_1=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\left(-x^3+6x^2-9x+4\right)dx=4\,.$$

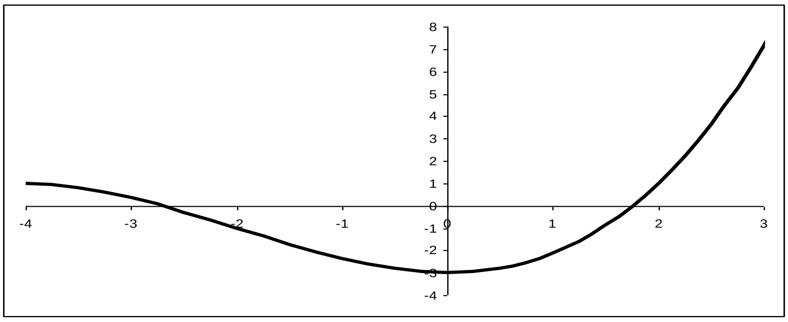
Für die Landfläche A_2 in Küstennähe in vergangenen Jahrhunderten ergibt sich

$$A_2=\int_1^3 h(x)dx=\int_1^3\left(x^2-2x+1\right)dx=2{,}\overline{6}\,.$$

Durch die Veränderung der Küstenlinie kam es also zu einem Landgewinn von $4-2{,}\overline{6}=1{,}\overline{3}$ Quadratlängeneinheiten $(2{,}5\,\text{km})^2$, also rund 8,3 km².

5. a) Wertetabelle und Graph:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	0,375	-1	-2,375	-3	-2,125	1	7,125



b) Das größte Gefälle kann aus dem Rechts-Links-Wendepunkt abgelesen werden: Ableitungen:

- $f'(x)=0{,}375x^2+1{,}5x$
- $f''(x)=0{,}75x+1{,}5$
- $f''(x)=0{,}75$

Nullstelle der zweiten Ableitung: $x=-2$

Wegen $f''(-2)=0{,}75>0$ findet man RLW$(-2|-1)$, sodass das größte Gefälle bei $x=-2$ vorliegt. Es beträgt $f'(-2)=-1{,}5$, also 150 %.

Für $x>-2$ ist der Graph von f eine Linkskurve und die Ableitung f' ist in diesem Bereich streng monoton wachsend. Den größten Wert hat f' also am Ostende des Wanderwegs bei $x=3$. Dieser beträgt $f''(3)=3{,}75$ oder 375 %.

c) Die Länge L des Wegs ergibt sich aus

$$L=\int_{-4}^{3}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_{-4}^{3}\sqrt{1+\left(0{,}375x^2+1{,}5x\right)^2}\,dx=16{,}7\,.$$

Längeneinheiten, also rund 835 m.

Die Länge L_W des Weges bis zum stärksten Gefälle ergibt sich aus

$$L_W=\int_{-4}^{-2}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_{-4}^{-2}\sqrt{1+\left(0{,}375x^2+1{,}5x\right)^2}\,dx=2{,}91\,.$$

Längeneinheiten, also rund 145,5 m.

Um die tiefste Stelle des Wanderweges zu bestimmen, berechnen wir den Tiefpunkt des Graphen.

Kritische Stellen: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot(0{,}375x+1{,}5)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=-4$

Überprüfen der zweiten Ableitung:

- $f''(0)=1{,}5>0 \Rightarrow T(0|-3)$
- $f''(-4)=-1{,}5<0 \Rightarrow H(-4|1)$

Die tiefste Stelle liegt also bei $x=0$. Die Länge L_T des Weges bis zum tiefsten Punkt ergibt sich aus

$$L_T=\int_{-4}^{0}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_{-4}^{0}\sqrt{1+\left(0{,}375x^2+1{,}5x\right)^2}\,dx=5{,}83\,.$$

Längeneinheiten, also rund 291,5 m.

d) Die Krone der Staumauer liegt 150 m – also 3 Längeneinheiten – über dem tiefsten Punkt des Wanderwegs, der bei $x=0$ liegt. Die Krone der Staumauer stimmt also mit dem vom Graphen von f eingeschlossenen Teil der x-Achse überein. Um die beiden Punkte zu bestimmen, an denen die Krone der Staumauer auf die Seiten des Tals trifft, müssen die Nullstellen der Funktion f berechnet werden. Um die beiden Punkte zu bestimmen, an denen die Krone der Staumauer auf die Seiten des Tals trifft, müssen die Nullstellen der Funktion f berechnet werden. Diese liegen bei ungefähr $x=-2{,}75$ und $x=1{,}75$. Mit der Polyrootsfunktion des GTR findet man die genauen Lösungen $x=-2{,}69459271$ und $x=1{,}75877048$. Die Breite des Staudamms an der Oberkante ist also $1{,}75877048-(-2{,}69459271)=4{,}45336319$ Längeneinheiten, also rund 223 m.

e) Die Fläche der Staumauer ist die zwischen den Graphen der Funktion $g(x)=0$ und $f(x)=0{,}125x^3+0{,}75x^2-3$ im Bereich von $x=-2{,}69459271$ und $x=1{,}75877048$ liegende Fläche. Ihr Inhalt beträgt

$$\begin{aligned}\int_{-2{,}69459271}^{1{,}75877048}\left(0-\left(0{,}125x^3+0{,}75x^2-3\right)\right)dx &= \int_{-2{,}69459271}^{1{,}75877048}\left(-0{,}125x^3-0{,}75x^2+3\right)dx\\ &= \left[-\frac{0{,}125}{4}x^4-\frac{0{,}75}{3}x^3+3x\right]_{-2{,}69459271}^{1{,}75877048}\\ &= 3{,}617211192-(-4{,}840022395)\\ &= 8{,}457233587\end{aligned}$$

Quadratlängeneinheiten $(50\,\text{m})^2$. Dies sind rund 21.143 m².

f) Die Talsperre kann als ein senkrechter Zylinder aufgefasst werden, dessen Grundfläche die Staumauer ist und der die Höhe $h=8$ hat. Das gesuchte Volumen ist also

$$8\cdot\int_{-2{,}69459271}^{1{,}75877048}\left(-0{,}125x^3-0{,}75x^2+3\right)dx=8\cdot 8{,}457233587=67{,}6578687$$

Kubiklängeneinheiten $(50\text{m})^3$, also rund 8.457.234 m³

6. a) Zuerst wird der Hochpunkt des Graphen berechnet.
Ableitungen:

- $f'(x)=-\frac{45}{64}x^2+\frac{115}{32}x-\frac{25}{8}$
- $f''(x)=-\frac{45}{32}x+\frac{115}{32}$

Kritische Stellen: $x_1=\frac{10}{9}$, $x_2=4$

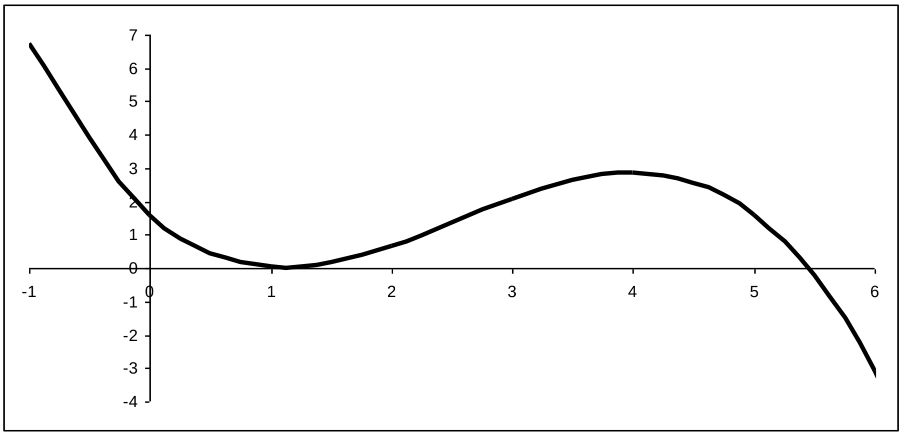
Überprüfen der zweiten Ableitung:

- $f''\left(\frac{10}{9}\right)=\frac{65}{32}>0\Rightarrow T\left(\frac{10}{9}|0{,}025\right)$
- $f''(4)=-\frac{65}{32}<0\Rightarrow H(4|2{,}85)$

Wertetabelle und Funktionsgraph:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6

$f(x)$	6,75625	1,6	0,0375	0,6625	2,06875	2,85	1,6	-3,0875



Um die Stelle an der gegenüberliegenden Talseite zu finden, an der $f(x)=2{,}85$ ist, transformieren wir die Gleichung in Nomalform:

$$f(x)=2{,}85 \Leftrightarrow -\frac{15}{64}x^3+\frac{115}{64}x^2-\frac{25}{8}x-\frac{5}{4}=0\,.$$

Dann lösen wir diese Gleichung mit Polyroots. Als weitere Lösung ergibt sich $x=-\frac{1}{3}$. Die Krone der Staumauer hat damit eine Länge von $4-\left(-\frac{1}{3}\right)=4\frac{1}{3}$ Längeneinheiten. Dies sind $216\frac{2}{3}=216{,}\overline{6}$ Meter.

b) Die Talsperre kann als ein senkrechter Zylinder aufgefasst werden, dessen Grundfläche die Staumauer ist und der die Höhe $h=2000/50=40$ Längeneinheiten hat. Die Grundfläche ist dabei die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $g(x)=2{,}85$ und f im Intervall $[-1/3|4]$. Das gesuchte Volumen ist also

$$40\cdot\int_{-1/3}^{4}\left(g(x)-f(x)\right)dx=40\cdot\int_{-1/3}^{4}\left(\frac{15}{64}x^3-\frac{115}{64}x^2+\frac{25}{8}x+1{,}25\right)dx=275{,}473$$

Kubiklängeneinheiten $(50\text{m})^3$, also rund 34.434.076 m³

c) Die Staumauer kann als senkrechter Zylinder aufgefasst werden, dessen Grundfläche die Staumauer ist und der die Höhe $h=8/50=0{,}16$ Längeneinheiten hat. Die Grundfläche ist wiederum die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $g(x)=2{,}85$ und f im Intervall $[-1/3|4]$. Das gesuchte Volumen ist also

$$0{,}16\cdot\int_{-1/3}^{4}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

$$=0{,}16\cdot\int_{-1/3}^{4}\left(\frac{15}{64}x^3-\frac{115}{64}x^2+\frac{25}{8}x+1{,}25\right)dx=1{,}10189043$$

Kubiklängeneinheiten $(50\text{m})^3$, also rund 137.736,3 m³. 80 % hiervon sind 110.189,04 m³, sodass Beton mit einer Masse von 264.453.696 kg oder rund 264.453 t benötigt wird. Hierfür müssen 17.631 Lkw-Fahrten durchgeführt werden.

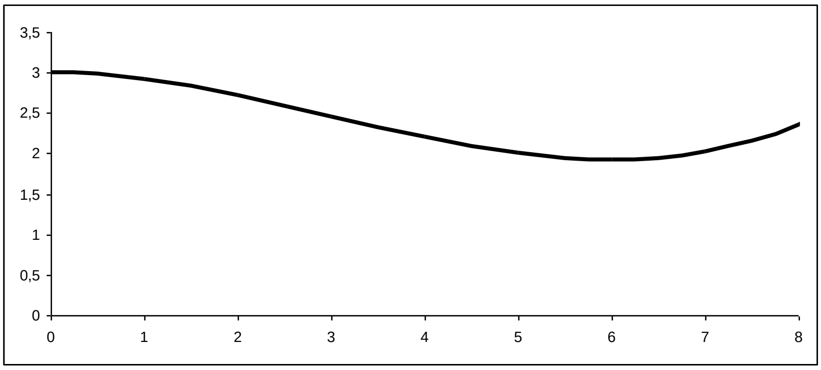
Übung 4.

1. Die Nullstellen von f sind $x=0$ und $x=7$. Das Volumen ist also

$$\pi\cdot\int_0^7\left(-\frac{1}{6}x\cdot(x-7)\right)^2 dx = \frac{\pi}{36}\cdot\int_0^7\left(x^8-28x^7+294x^6-686x^5+2401x^4\right)dx$$
$$= \frac{\pi}{36}\cdot 13515255{,}68$$
$$= 1179428{,}6\ \text{mm}^3$$

2. a) Wertetabelle und Graph:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	2,92	2,72	2,46	2,2	2	1,92	2,02	2,36



b) Der kleinste Umfang kann aus dem Tiefpunkt der Funktion f abgelesen werden.
Ableitungen:
- $f'(x)=0{,}03x^2-0{,}18x$
- $f''(x)=0{,}06x-0{,}18$

Kritische Stellen: $x=0$, $x=6$
Überprüfen der zweiten Ableitung:
- $f''(0)=-0{,}18<0 \Rightarrow H(0|3)$
- $f''(6)=0{,}18>0 \Rightarrow T(6|1{,}92)$

Der kleinste Umfang befindet sich also in einer Höhe von 60 Metern. Der Umfang in dieser Höhe entspricht dem Umfang eines Kreises mit Radius 19,2 Meter. Damit ergibt sich für den kleinsten Umfang $U=2\pi r=2\pi\cdot 19{,}2=120{,}637$ Meter.

c) Das Volumen ist

$$V = \pi\cdot\int_0^8\left(0{,}01x^3-0{,}09x^2+3\right)^2 dx$$
$$= \pi\cdot\int_0^8\left(0{,}0001x^6-0{,}0018x^5+0{,}0081x^4+0{,}06x^3-0{,}54x^2+9\right)dx$$
$$= \pi\cdot 45{,}68$$
$$= 143{,}509$$

Kubiklängeneinheiten $(10\text{m})^3$, also 145.509 m³.

d) Der zwischen den Innenwänden des Kühlturms liegende Teil entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion g mit

$$g(x)=f(x)-0{,}05=0{,}01x^3-0{,}09x^2+2{,}95$$

um die x-Achse im Intervall $[0|8]$. Der Rauminhalt ist

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \pi \cdot \int_0^8 \left(0{,}01x^3 - 0{,}09x^2 + 2{,}95\right)^2 dx \\
&= \pi \cdot \int_0^8 \left(0{,}0001x^6 - 0{,}0018x^5 + 0{,}0081x^4 + 0{,}059x^3 - 0{,}531x^2 + 8{,}7025\right) dx \\
&= \pi \cdot 43{,}81 \\
&= 137{,}64
\end{aligned}
$$

Kubiklängeneinheiten $(10\text{m})^3$, also 137.640 m³. Das Volumen des Wand ist die Differenz $V - V_0$. Das Volumen der Wand beträgt also 7.869 m³

3. a) Die Tangentengleichung ist von der Form $t(x) = m \cdot x + b$. Im vorliegenden Fall ist $m = g'(4) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Da die Tangente durch den Punkt $(4|g(4)) = (4|2)$ geht, ist $t(4) = 2$, also $2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b$. Hieraus ergibt sich $b = 1$.

b) Das Volumen ist

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_0^4 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx \\
&= \pi \cdot \int_0^4 x\,dx = \pi \cdot 8 \approx 25{,}133\,\text{cm}^3
\end{aligned}
$$

Das Füllvolumen beträgt also 0,025133 Liter.

c) Bei den angegebenen Füllhöhen befinden sich 8π Milliliter plus das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht durch Rotation der Tangente t im Bereich von 4 bis zur angegebenen Höhe; zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
V(5) &= 8\pi + \pi \cdot \int_4^5 \left(\frac{1}{4}x + 1\right)^2 dx = 8\pi + \pi \cdot \int_4^5 \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) dx \\
&= 8\pi + \pi \cdot \left[\frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x\right]_4^5 \approx 39{,}335\,\text{ml}
\end{aligned}
$$

Analog ergibt sich $V(8) \approx 104{,}72\,\text{ml}$ und $V(12) \approx 259{,}7\,\text{ml}$

d) Die Berechnung erfolgt wie in c) nur mit variabler Höhe x

$$
\begin{aligned}
V(x) &= 8\pi + \pi \cdot \int_4^x \left(\frac{1}{4}u + 1\right)^2 du \\
&= \pi \cdot \left(8 + \int_4^x \left(\frac{1}{16}u^2 + \frac{1}{2}u + 1\right) du\right) \\
&= \pi \cdot \left(8 + \left[\frac{1}{48}u^3 + \frac{1}{4}u^2 + u\right]_4^x\right) \\
&= \pi \cdot \left(8 + \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{48}4^3 - \frac{1}{4}4^2 - 4\right) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{4}{3}\right)
\end{aligned}
$$

e) 250 ml werden nach c) bei etwa $x=12$ erreicht. Um die genaue Lage des Eichstrichs zu bestimmen, muss die Gleichung

$$V(x)=250 \Leftrightarrow \pi\cdot\left(\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{4}x^2+x-\frac{4}{3}\right)-250=0$$

gelöst werden. Mit Polyroots ergibt sich die Lösung $x=11{,}805$. Der Eichstrich muss also bei 11,805 cm angebracht werden.