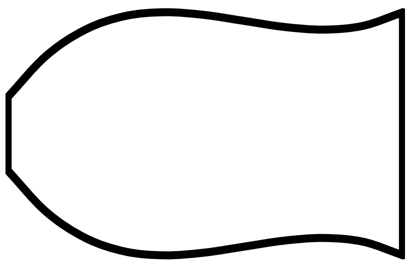
Anwendungen der Integralrechnung

1. Ziele der Lerneinheit

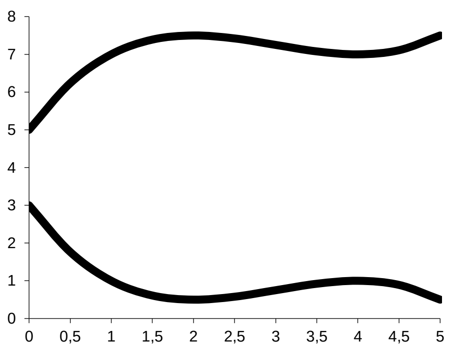
In der folgenden Lerneinheit lernen Sie,

- wie der Inhalt einer Fläche, die von zwei Funktionsgraphen begrenzt wird, berechnet werden kann;
- wie man den durchschnittlichen Wert, den eine Funktion auf einem Intervall hat, berechnen kann;
- was man unter der Bogenlänge versteht und wie man sie berechnen kann;
- was Rotationskörper sind und wie man deren Volumen mithilfe der Integralrechnung berechnen kann.

2. Anwendung 1: Zweiseitig krummlinig begrenzte Flächen



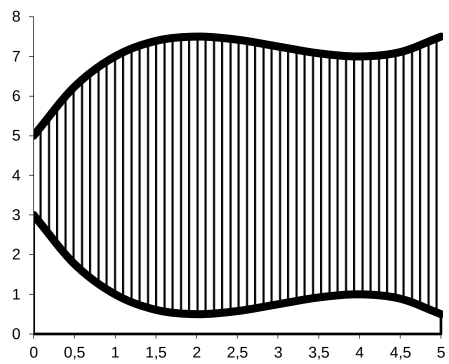
Der Sandkasten der Kita Ömmes und Oimel, siehe Skizze rechts, hat die Form eines stilisierten Fisches. Er ist bis zu einer Tiefe von 50 cm mit Sand gefüllt, der nun ausgetauscht werden soll. Die Leiterin der KiTa muss bestimmen, wie viel Sand hierzu bestellt werden muss. Dazu muss das Volumen des Sandes berechnet werden, der in den Sandkasten passt. Das Volumen kann man mit der Volumenformel $V = G \cdot h$, wobei h die Höhe (in unserem Fall 50 cm) und G den Inhalt der Grundfläche angibt. Die Grundfläche in unserem Fall die fischförmige Sandkastenoberfläche.



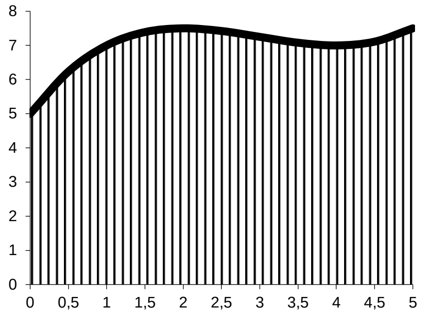
Um deren Inhalt zu berechnen, hat die Leiterin der KiTa die Oberfläche des Sandkastens in die maßstabsgerechte Zeichnung links übertragen. Alle Einheiten sind in Metern angegeben. Die obere und untere Begrenzung entsprechen den Graphen zweier Funktionen f und g, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

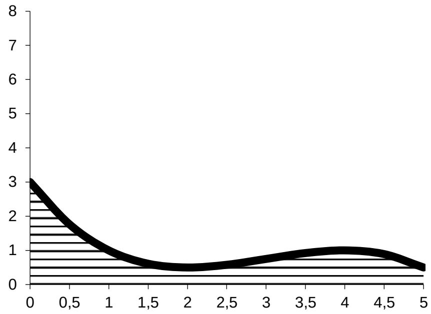
- $f(x) = 0{,}125x^3 - 1{,}125x^2 + 3x + 5$
- $g(x) = -0{,}125x^3 + 1{,}125x^2 - 3x + 3$.

Zu berechnen ist der Inhalt der über dem Intervall $0 \le x \le 5$ zwischen den beiden Graphen liegenden Fläche, siehe Skizze rechts.



Diese Fläche ist die Differenz aus der Fläche unter der Funktion f (Skizze unten links) und der Fläche unter der Funktion g (Skizze unten rechts).





Die beiden Flächen können mithilfe der jeweiligen Integrale berechnet werden. Für den gesuchten Flächeneinhalt A gilt also

$$A=\int_0^5 f(x)dx-\int_0^5 g(x)dx=\int_0^5 \big(f(x)-g(x)\big)dx\,.$$

Es wird also die „obere“ Funktion von der „unteren“ Funktion abgezogen. Dan wird diese Differenz integriert. Diese Regel gilt ganz allgemein.

Satz. Liegt für $a\le x\le b$ der Graph von f nie unter dem Graphen von g, dann kann der Inhalt A der Fläche zwischen den beiden Graphen mit der Formel

$$A=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx$$

berechnet werden.

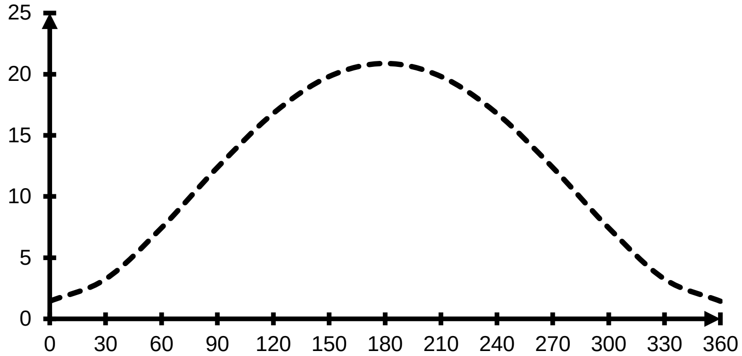
Für den Sandkasten der KiTa ÖMMES UND OIMEL ergibt sich

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^5 \big(f(x)-g(x)\big)dx\\
&= \int_0^5 \Big(0{,}125x^3-1{,}125x^2+3x+5-\big(-0{,}125x^3+1{,}125x^2-3x+3\big)\Big)dx\\
&= \int_0^5 \big(0{,}25x^3-2{,}25x^2+6x+2\big)dx\\
&= \Big[0{,}0625x^4-0{,}75x^3+3x^2+2x\Big]_0^5\\
&= 30{,}3125
\end{aligned}$$

Das Volumen des Sandkastens ist also $V=30{,}3125\cdot 0{,}5=15{,}15325\text{m}^3$ → *Übung 1*

3. Anwendung 2: Mittelwerte

Nach Aufzeichnungen eines Wetterdienstes haben sich die um 12 Uhr jeden Tag gemessenen Temperaturen an einem Ort im Lauf eines Jahres gemäß der unten abgebildeten Kurve entwickelt. Hierbei wurde – der Einfachheit halber – das Jahr mit 360 Tagen und jeder Monat mit 30 Tagen angenommen.

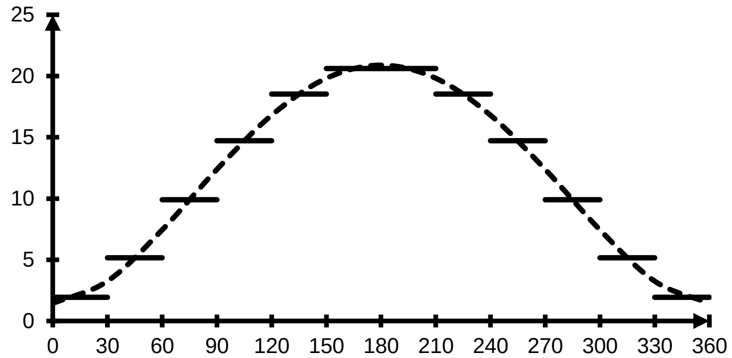


Wir nehmen an: Die Temperaturkurve entspricht im Intervall $0 \leq x \leq 360$ dem Graphen der durch

$$f(x) = \frac{0{,}001}{54000}x^4 - \frac{0{,}04}{3000}x^3 + 0{,}0024x^2 + 1{,}44$$

gegebenen Funktion. Wir wollen die mittägliche Durchschnittstemperatur dieses Ortes berechnen. Hierfür müssen die 360 Tagestemperaturen addiert und das Ergebnis durch 360 geteilt werden. Dies ist sehr aufwändig! Geht es nicht einfacher?

Versuchsweise tun wir zunächst so, als wären die Temperaturen in jedem einzelnen Monat konstant dem Wert, der für den jeweils mittleren (also fünfzehnten) Tag des Monats gemessen wurde:



Im Januar: Jeden Tag (also dreißig mal) Temperatur $f(15)$; im Februar: Jeden Tag (also 30 mal) Temperatur $f(45)$, ..., im Dezember: Jeden Tag (also 30 mal) Temperatur $f(345)$ Für den Jahresmittelwert ergibt sich dann folgender ungefährer Wert:

$$\begin{aligned} M_{30} &= \frac{1}{360} \cdot \big(f(15) \cdot 30 + f(45) \cdot 30 + f(75) \cdot 30 + f(105) \cdot 30 + f(135) \cdot 30 + f(165) \cdot 30 \\ &= \quad + f(195) \cdot 30 + f(225) \cdot 30 + f(255) \cdot 30 + f(285) \cdot 30 + f(315) \cdot 30 + f(345) \cdot 30 \big) \\ &= 11{,}8084375 \end{aligned}$$

Es fällt auf: Der Term in der Klammer ist nichts anderes, als eine Riemannsche Summe für die Funktion f für $0 \leq x \leq 360$ bei Zerlegung in 12 Teilintervalle.

Verkleinern wir die Bereiche, in denen wir die Temperatur als konstant annehmen, indem wir die Anzahl N der Teilintervalle immer weiter erhöhen, wird einerseits die Approximation immer genauer. Andererseits nähern sich die entstehenden Riemannschen Summen immer weiter dem Integral $\int_0^{360} f(x)dx$ an. Die mittägliche Durchschnittstemperatur ist also:

$$M=\frac{1}{360}\cdot\int_0^{360} f(x)dx\,.$$

Dies ist auch ganz allgemein so:

Satz. Ist die Funktion f stetig, dann ist $M=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$ der **Mittelwert** von f für $a\le x\le b$.

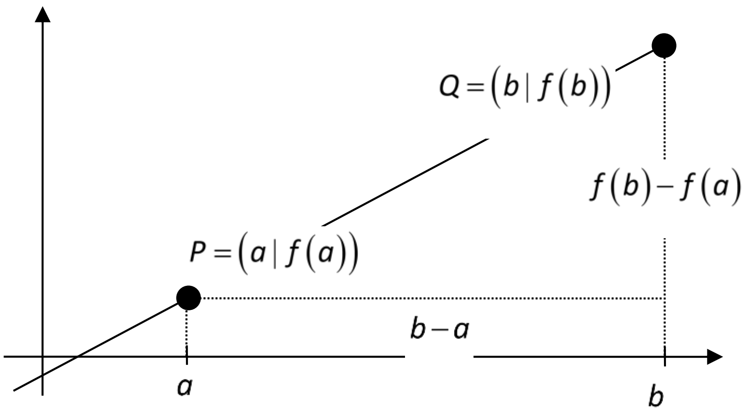
Als Mittelwert der Temperaturen ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{360}\cdot\int_0^{360}\left(\frac{0,001}{54000}x^4-\frac{0,04}{3000}x^3+0,0024x^2+1,44\right)dx\\
&= \frac{1}{360}\cdot\left[\frac{0,001}{270000}x^5-\frac{0,01}{3000}x^4+0,0008x^3+1,44x\right]_0^{360}\\
&= 11,808
\end{aligned}$$

Die Durchschnittstemperatur ist also ungefähr 11,8 Grad. → *Übung 2*

4. Anwendung 3: Die Bogenlänge

Wie kann die Länge L des zwischen $x=a$ und $x=b$ liegenden Teil des Graphen einer Funktion f berechnet werden? Wenn f eine lineare Funktion ist, kann dies leicht mithilfe des Satzes von Pythagoras geschehen: In diesem Fall ist, siehe rechts, die Länge L der Strecke von P nach Q zu bestimmen. Nach dem Satz des Pythagoras gilt in dem eingezeichneten (Steigungs-) Dreieck



$$L^2=(b-a)^2+\big(f(b)-f(a)\big)^2,$$

woraus sich durch Wurzelziehen:

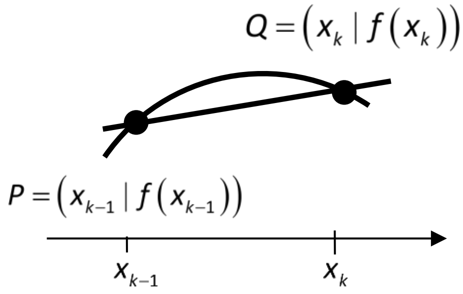
$$L=\sqrt{(b-a)^2+\big(f(b)-f(a)\big)^2}$$

ergibt. Wenn man will, kann man hier noch etwas umformen:

$$L=\sqrt{(b-a)^2+\big(f(b)-f(a)\big)^2}=\sqrt{(b-a)^2\left(1+\frac{\big(f(b)-f(a)\big)^2}{(b-a)^2}\right)}=\underline{\underline{(b-a)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2}}}$$

Dies ist die Länge der Strecke zwischen den Punkten $P=(a\,|\,f(a))$ und $Q=(b\,|\,f(b))$.

Wenn f eine beliebige Funktion ist, approximieren wir die Länge L, indem wir das Intervall $a \le x \le b$ durch Teilpunkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ in jeweils gleich lange Teilintervalle $x_{k-1} \le x \le x_k$ zerlegen und dann, siehe Skizze rechts, zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Teilpunkten statt der Länge des Graphen die Länge der Verbindung die Länge der Sekante durch P und Q berechnen. Die Länge eines solchen Sekantenstücks ist – wie eben herausgefunden



$$\left(x_k - x_{k-1}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \; .$$

Der sogenannte Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass man eine Stelle z_k zwischen x_{k-1} und x_k finden kann, sodass $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(z_k)$ ist. Zwischen x_{k-1} und x_k hat der Graph also ungefähr die Länge $\left(x_k - x_{k-1}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(z_k)\right)^2}$.

Die Länge des Graphen zwischen a und b ist dann ungefähr die Summe dieser Werte:

$$L_N = \left(x_1 - x_0\right) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(z_1)\right)^2} + \left(x_2 - x_1\right) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(z_2)\right)^2} + \ldots + \left(x_N - x_{N-1}\right) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(z_N)\right)^2}$$

L_N ist nichts anderes als eine Riemannsche Summe für $g(x) = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}$! Durch die Erhöhung der Zahl N der Teilinterpunkte wird einerseits der Unterschied zwischen L_N und der tatsächlichen Länge des Graphen immer kleiner, und andererseits nähert sich L_N immer mehr dem Integral $\int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$ an. Dies bedeutet:

Satz. Angenommen, die Funktion f ist für $a \le x \le b$ differenzierbar und die Ableitung f' ist stetig. Dann ist

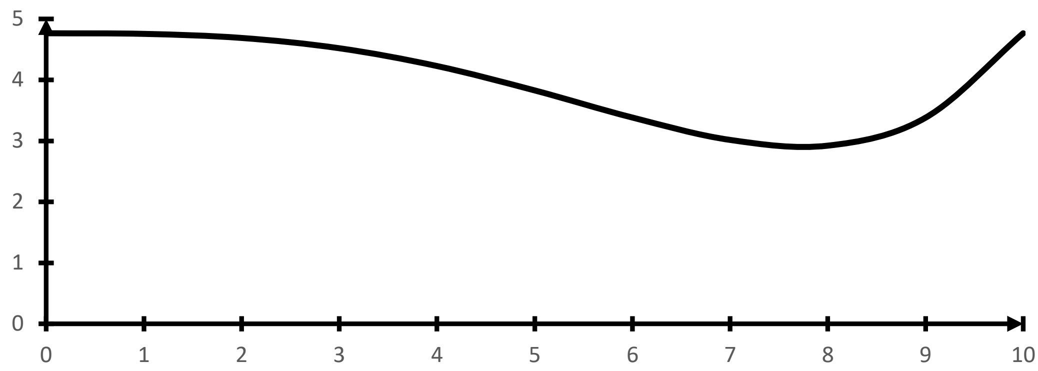
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

die Länge des Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$.

→ *Übung 3*

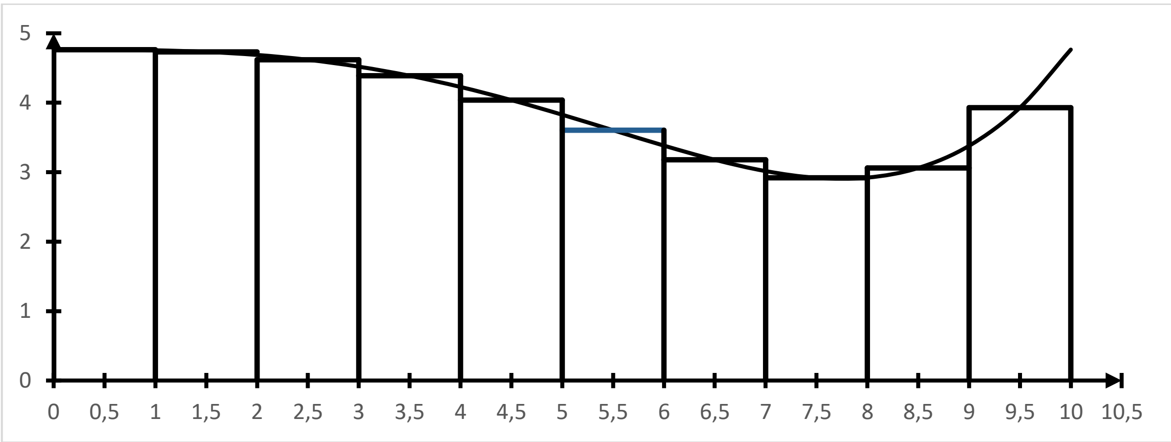
5. Anwendung 4: Rotationskörper

Eine Behindertenwerkstatt stellt Holzbecher her. Die Form der Holzbecher erhält man, wenn man den Graphen der durch $f(x) = 0{,}0001x^5 - 0{,}01x^3 + 4{,}765$ im Bereich von $x = 0$ bis $x = 10$ um die x-Achse rotieren lässt:



Hierbei sind alle Einheiten in cm angegeben. Einen Körper, der durch Rotation einer Kurve entsteht, nennt man auch **Rotationskörper**.

Um das Volumen dieses Rotationskörpers zu berechnen, schauen wir uns eine Approximation der Fläche zwischen Graph und Koordinatenachsen durch Rechtecke an:



Die entsprechende Riemannsche Summe ist

$$f(0{,}5)\cdot 1+f(1{,}5)\cdot 1+\ldots+f(8{,}5)\cdot 1+f(9{,}5)\cdot 1\,.$$

Das Volumen des Rotationskörpers erhält man näherungsweise, indem alle Rechtecke um die x-Achse rotieren lässt. Es entstehen 10 „Diskusscheiben“. Das Volumen jeder dieser Scheiben ist $V=G\cdot h$. Die Höhe ist dabei jeweils 1, die Grundfläche ist jeweils ein Kreis mit Radius $f(0{,}5),f(1{,}5),\ldots,f(9{,}5)$. Die Volumina dieser Diskusscheiben sind also

$$\underbrace{\pi\cdot\left(f(0{,}5)\right)^2}_{G}\cdot\underbrace{1}_{h},\underbrace{\pi\cdot\left(f(1{,}5)\right)^2}_{G}\cdot\underbrace{1}_{h},\ldots,\underbrace{\pi\cdot\left(f(9{,}5)\right)^2}_{G}\cdot\underbrace{1}_{h}$$

(Zur Erinnerung: Der Inhalt der Kreisfläche wird mit der Formel $\pi\cdot r^2$ berechnet) Das Volumen des Rotationskörpers ist also approximativ

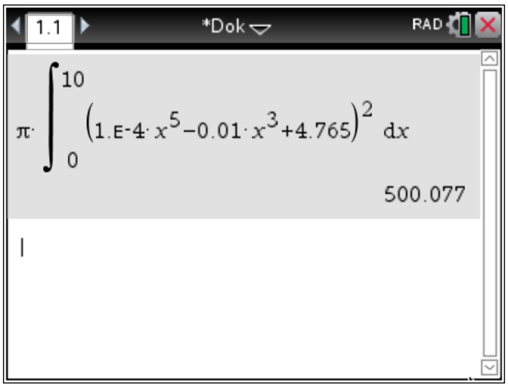
$$\begin{aligned}V&\approx\pi\cdot\left(f(0{,}5)\right)^2\cdot 1+\pi\cdot\left(f(1{,}5)\right)^2\cdot 1+\ldots+\pi\cdot\left(f(8{,}5)\right)^2\cdot 1+\pi\cdot\left(f(9{,}5)\right)^2\cdot 1\\&=\pi\cdot\left(\left(f(0{,}5)\right)^2\cdot 1+\left(f(1{,}5)\right)^2\cdot 1+\ldots+\left(f(8{,}5)\right)^2\cdot 1+\left(f(9{,}5)\right)^2\cdot 1\right)\end{aligned}$$

In der Klammer steht hier eine Riemannsche Summe für die Funktion $\left(f(x)\right)^2$, die sich, wenn man die Anzahl der Rechtecke erhöht (also die Rechteckbreiten verkleinert) dem Integral $\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$ annähert. Da das Verkleinern der Rechteckbreiten auch dazu führt, dass das Volumen immer genauer bestimmt wird, ergibt sich:

> **Satz**. Das Volumen des Rotationskörpers, dessen Mantelfläche durch Rotation des Graphen der Funktion f im Bereich $a \le x \le b$ um die x-Achse entsteht, kann mit der Formel
>
> $$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$
>
> berechnet werden.

Für die Becher der Behindertenwerkstatt ergibt sich mithilfe des GTR:

$$V = \pi \cdot \int_0^{10} \left(0{,}0001x^5 - 0{,}01x^3 + 4{,}765\right)^2 dx$$
$$= 500{,}077\ \text{cm}^3$$



Der Holzbecher fasst also (fast genau) einen halben Liter. Natürlich kann das Integral mithilfe einer Stammfunktion ohne GTR berechnet werden. Da der Integrand aber erst aufwändig ausmultipliziert werden muss, ist die Verwendung des GTR hier zweckmäßiger.

→ *Übung 4*

Übungen zur Lerneinheit *Anwendungen der Integralrechnung*

Übung 1.

1. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Graphen der Funktionen f und g im Intervall $a \le x \le b$ einschließen.
   a) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x + 3$, $g(x) = -2x^2 + 2x + 3$, $a = 1$, $b = 5$
   b) $f(x) = x^3 + 2x + 2$, $g(x) = 3x + 2$, $a = 0$, $b = 1$
   c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $a = 1$, $b = 4$
   d) $f(x) = 8x^4 - 5x^2 - 1$, $g(x) = x^5 - 2x - 1$, $a = 1$, $b = 5$
   e) $f(x) = -0{,}5x^3 + 4x^2 + 5$, $g(x) = \ln(x)$, $a = 1$, $b = 8$
   f) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = xe^{-x^2}$, $a = 0$, $b = 1$

2. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionsgraphen von f und g und berechnen Sie dann den Inhalt der Fläche, die zwischen den Schnittpunkten von den beiden Graphen eingeschlossen wird.
   a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 5{,}5$, $g(x) = x + 3$
   b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$, $g(x) = x^2 + 2x - 1$
   c) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, $g(x) = -x^2 + 7$
   d) $f(x) = 0{,}5x^4 - 6{,}5x^2 + 18$, $g(x) = -0{,}5x^4 + 6{,}5x^2 - 18$

Übung 2.

1. Für Open-Air-Veranstaltungen will die Stadt Bonn eine 120 Meter lange Freifläche ausweisen. Die nördliche Begrenzung der Freifläche kann dargestellt werden durch den im Bereich $0 \le x \le 120$ liegenden Teil des Graphen der Funktion f mit
$$f(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}0237x^2 + 1{,}368x + 11.$$
   Die südliche Grenze entspricht dem im selben Bereich liegenden Teil des Graphen der Funktion g mit
$$g(x) = 0{,}01x^2 - 1{,}2x - 7{,}2.$$
   Hierbei entsprechen eine x-und eine y-Einheit jeweils einem Meter. Die y-Achse weist nach Norden.
   a) Bestimmen Sie, für wie viele Menschen die Fläche höchstens freigegeben werden darf, wenn für zwei Menschen mindestens 1 m² zur Verfügung stehen muss.
   b) Neben dem Haupteingang an der der Westseite soll aus Sicherheitsgründen an der breitesten Stelle der Freifläche jeweils ein Notausgang an der Nord- und der Südseite angelegt werden. Berechnen Sie, wo dies ist.
   c) Bestimmen Sie auch die durchschnittliche Breite der Freifläche.

2. Hühnereier aus biologischer Haltung werden mehr und mehr nachgefragt. Neben vielen anderen Bedingungen verlangt das Prädikat „aus biologischer Landwirtschaft“, dass die Hühner frei laufen können, wobei für jedes Tier mindestens 4 m² Fläche zur Verfügung stehen müssen. Ein Landwirt plant, auf einem freien Gelände Hühner zu halten, um dort

nach Bio-Kriterien Hühnereier zu produzieren. Das Gelände kann mathematisch modelliert werden als die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen mit den Gleichungen

$$f(x) = -0{,}019x^2 + 1{,}52x + 5$$

(Nordbegrenzung) und

$$g(x) = -0{,}0005x^3 + 0{,}0525x^2 - 0{,}9x + 5$$

(Südbegrenzung). Hierbei entspricht eine Längeneinheit einem Meter. Die y-Achse weist nach Norden.

a) Bestimmen Sie, wie viele Hühner der Bauer auf der Fläche halten darf.
b) Dort, wo der Abstand von Nord- zu Südbegrenzung am größten ist, soll genau in der Mitte zwischen beiden Begrenzungen ein Unterstand mit Futterstation errichtet werden. Berechnen Sie, wo der Unterstand gebaut werden muss.
c) Bestimmen Sie auch den durchschnittlichen Abstand von Nord- zu Südbegrenzung.

Die jährliche Anzahl der in den städtischen Kindertagesstätten beschäftigten Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter einer mittelgroßen Stadt von 1990 bis 2020 kann näherungsweise mithilfe der durch

$$f(x) = -0{,}004x^3 + 0{,}12x^2 - 0{,}8x + 208$$

gegebenen Funktion bestimmt werden. Dabei entspricht $x = 0$ dem Jahr 1990 und $x = 30$ dem Jahr 2020.

a) Untersuchen Sie die Entwicklung der Mitarbeiterzahlen der Jahre von 1990 bis 2020, indem Sie die größte und die kleinste Mitarbeiteranzahl berechnen und indem Sie bestimmen, in welchen Jahren die Mitarbeiterzahl am stärksten zunahm und am stärksten abnahm.
b) Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche Mitarbeiterzahl von 1990 bis 2020.

Übung 3.

1. Beim Fußballspielen der Jugendgruppe in der Turnhalle schießt Ben den Ball quer durch die Halle. Die Flugkurve kann mit Hilfe der durch

$$f(x) = -0{,}00625x^3 + 0{,}1125x^2$$

gegebenen Funktion modelliert werden, wobei x und $f(x)$ in Metern gemessen werden.

a) Jeder, der einen Ball an die Hallendecke schießt, muss 50 Cent Strafe in die Gruppenkasse zahlen. Untersuchen Sie, ob Ben etwas zahlen muss. Die Halle ist 6 Meter hoch.
b) Berechnen Sie, wie weit der Ball fliegt, bei welcher Entfernung er am stärksten steigt und wie groß die durchschnittliche Flughöhe ist.
c) Ermitteln Sie die mithilfe des GTR die Länge der Strecke, die der Ball in der Luft zurücklegt.

2. Für Open-Air-Veranstaltungen will die Stadt Bonn eine 120 Meter lange Freifläche ausweisen. Die nördliche Begrenzung der Freifläche kann dargestellt werden durch den im Bereich $0 \le x \le 120$ liegenden Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}0237x^2 + 1{,}368x + 11\,.$$

Die südliche Grenze entspricht dem im selben Bereich liegenden Teil des Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = 0{,}01x^2 - 1{,}2x - 7{,}2\,.$$

Hierbei entsprechen eine x- und eine y-Einheit jeweils einem Meter. Die y-Achse weist nach Norden.
Das Open-Air-Gelände soll mit einem Zaun eingefriedet werden, dessen Errichtung 28,50 € je Meter kostet. Ermitteln Sie mithilfe des GTR, mit welchen Kosten zu rechnen ist.

3. Ein Freigelände, auf dem ein Landwirt nach Bio-Kriterien Hühnereier produzieren will, kann mathematisch modelliert werden als die zwischen $x = 0$ und $x = 55$ liegende Fläche zwischen den Graphen der Funktionen mit den Gleichungen

$$f(x) = -0{,}019x^2 + 1{,}52x + 5$$

(Nordbegrenzung) und

$$g(x) = -0{,}0005x^3 + 0{,}0525x^2 - 0{,}9x + 5$$

(Südbegrenzung). Hierbei entspricht eine Längeneinheit einem Meter. Die y-Achse weist nach Norden.
Das Gelände soll mit einem Zaun eingefriedet werden, dessen Errichtung 25 € je Meter kostet. Ermitteln Sie mithilfe des GTR, mit welchen Kosten der Landwirt rechnen muss.

4. Der Verlauf der Küste zwischen zwei Häfen am Nordfriesischen Wattenmeer kann näherungsweise dargestellt werden durch den Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4\,,$$

der zwischen seinem Schnittpunkt S mit der y-Achse und seinem Hochpunkt H liegt. Hierbei entspricht eine Längeneinheit 2,5 km.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten von S und H.
   b) Ermitteln Sie mithilfe des GTR die Länge des Küstenstreifens.
   c) Zwischen S und H befindet sich am Tiefpunkt T des Graphen von f ein beliebter Ferienort. Der Tourismusverein überlegt, von hier aus Tagestouren mit Wattwagen zum nächstgelegenen Punkt auf einer vorgelagerten Insel anzubieten. Die Küstenlinie der Insel kann im in Frage kommenden Bereich ungefähr durch den Graphen der durch

   $$g(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}2x + 5$$

   gegebenen Funktion beschrieben werden. Skizzieren Sie die Graphen von f und g für $0 \le x \le 4$ in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie dann unter der Annahme, dass die Wagen eine gerade Strecke fahren können, die Länge der Fahrstrecke.
   d) Der heutige Küstenverlauf unterscheidet sich von dem Küstenverlauf in früheren Jahrhunderten. Die damalige Küstenlinie zwischen T und H kann beschrieben werden mithilfe der durch

   $$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

   gegebenen Funktion. Untersuchen Sie, ob es durch die Veränderung der Küstenlinie zu einem Landgewinn oder einem Landverlust kam, und berechnen Sie, wie hoch dieser war.

5. Der Querschnitt durch ein Tal in der Eifel von West nach Ost kann näherungsweise beschrieben werden durch den zwischen $x = -4$ und $x = 3$ liegenden Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3\,.$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit 50 m. Dieser Querschnittslinie folgt ein Bergwanderweg.

a) Zeichnen Sie den Querschnitt des Tales.
b) Berechnen Sie das größte Gefälle und die größte Steigung des Bergwanderwegs.
c) Ermitteln Sie mithilfe des GTR die Länge des Bergwanderwegs. Bestimmen Sie auch, nach wie vielen Kilometern das größte Gefälle und nach wie vielen Kilometern der tiefste Punkt des Bergwanderwegs erreicht werden.
d) Entlang des Bergwanderwegs soll für eine neue Talsperre eine Staumauer errichtet werden, die vom tiefsten Punkt des Tales aus gemessen 150 m hoch ist. Bestimmen Sie die Breite der geplanten Staumauer an der Oberkante.
e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der geplanten Staumauer.
f) Hinter der geplanten Staumauer erstreckt sich das Tal noch weitere 400 m mit im Wesentlichen unveränderten Querschnitt und endet dann an einer nahezu senkrechten Bergwand. Berechnen Sie das Fassungsvermögen der geplanten Talsperre.

6. Eine Bürgerinitiative protestiert gegen den Bau eines Stausees in den Alpen. Um fundiert argumentieren zu können, studieren die Aktivisten die vom Freistaat Bayern veröffentlichten Pläne des Stausee-Projekts.
Der Querschnitt des Tals, das durch den Bau einer Staumauer zum Wasserbecken des Stausees werden soll, kann näherungsweise durch die Funktion f mit
$$f(x)=-\frac{15}{64}x^3+\frac{115}{64}x^2-\frac{25}{8}x+\frac{8}{5}$$
beschrieben werden, wobei eine Längeneinheit 50 m entspricht. Dabei beginnt die Krone der Staumauer im Hochpunkt des Graphen und endet in gleicher Höhe auf der gegenüberliegenden Tal-Seite.
   a) Berechnen Sie die Länge der Krone der Staumauer.
   b) Das Tal hat eine Länge von 2 km und schließt dann mit einer nahezu senkrechten Felswand ab. Sein Querschnitt bleibt auf die gesamte Länge im Wesentlichen unverändert. Bestimmen Sie, wie viel Wasser das Staubecken fassen wird.
   c) Die Staumauer ist im Schnitt 8 m dick. 80 % ihres Volumens wird aus Beton bestehen. Der Beton soll von Lkws, die 15 t laden können, zur Baustelle gebracht werden. Ermitteln Sie, wie viele Lkw-Fahrten zur Baustelle nötig sind, wenn 1 m³ Beton 2.400 kg wiegen.

Übung 4.

1. Eine Kaffeebohne ähnelt dem Rotationskörper, der entsteht, wenn die Parabel mit der Gleichung
$$f(x)=-\frac{1}{6}x\cdot(x-7)$$
zwischen den Nullstellen um die x-Achse rotiert. Hierbei werden x und $f(x)$ in Millimetern gemessen. Berechnen Sie ggf. mithilfe des GTR das Volumen der Kaffeebohne.

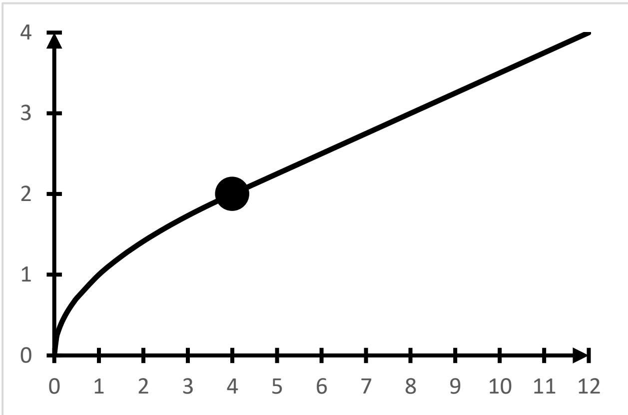
2. Die Mantelfläche eines 80 m hohen, runden Kühlturms eines Kraftwerks kann modelliert werden durch Rotation des zwischen $x=0$ und $x=8$ liegenden Teils des Graphen der Funktion f mit

$$f(x)=0{,}01x^3-0{,}09x^2+3$$

um die x-Achse. Hierbei entspricht eine Einheit 10 m.

   a) Stellen Sie mithilfe des GTR die Funktion f graphisch dar.
   b) Ermitteln Sie, in welcher Höhe der Turm den kleinsten Umfang hat, und berechnen Sie den Umfang in dieser Höhe.
   c) Berechnen Sie ggf. mithilfe des GTR das Volumen des Kühlturms.
   d) Die Wandstärke des Kühlturms beträgt 0,5 m. Bestimmen Sie das Volumen der Wand.

3. Der Kelch eines Weinglases entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse, wobei f wie folgt gegeben ist:



- Für $0 \le x \le 4$ ist $f(x)=\sqrt{x}$.
- Für $4 \le x \le 12$ stimmt $f(x)$ mit der an der Stelle 4 an den Graphen der Funktion $g(x)=\sqrt{x}$ gezeichneten Tangente überein.

Eine Längeneinheit entspricht hierbei 1 cm.

   a) Überprüfen Sie, dass die Tangente die Gleichung $t(x)=0{,}25x+1$ hat.
   b) Das Weinglas wird bis zur Höhe $x=4$ mit Wein gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Liter Wein im Glas sind. (1 Liter sind 1.000 cm³)
   c) Berechnen Sie, wie viel Liter Wein sich im Glas befinden, wenn das Glas bis zur Höhe $x=5$, $x=8$ bzw. $x=12$ gefüllt wird.
   d) Weisen Sie nach, dass das Flüssigkeitsvolumen in Abhängigkeit von der Einfüllhöhe x für $4 \le x \le 12$ berechnet werden kann mithilfe der durch

$$V(x)=\pi\cdot\left(\frac{1}{48}x^3+\frac{1}{4}x^2+x-\frac{4}{3}\right)$$

   gegebenen Funktion.
   e) Das Weinglas soll einen Eichstrich bei der Füllhöhe 250 ml bekommen. Berechnen Sie mithilfe des GTR, in welcher Höhe der Eichstrich gesetzt werden muss.