Integrationsmethoden – Wie man Integrale berechnet

1. Ziele der Lerneinheit

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie

- den Begriff „unbestimmtes Integral“ kennen;
- die Regel der partiellen Integration;
- eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus kennen;
- eine (sehr) einfache Version der Substitutionsregel;
- wie Integrale mithilfe des GTR numerisch berechnet werden können.

2. Das unbestimmte Integral

Nach dem Hauptsatz kann man ein Integral berechnen, indem man eine Stammfunktion F zum Integranden f bestimmt. Um anzudeuten, dass F eine Stammfunktion zu f ist, schreibt man manchmal

$$F(x)=\int f(x)dx$$

und nennt $\int f(x)dx$ auch das **unbestimmte Integral** von f. Statt zu sagen, dass für f eine Stammfunktion bestimmt wird, sagt man manchmal auch, dass f **integriert** wird.

Mithilfe der Schreibweise als unbestimmtes Integral können wir zum Beispiel $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3$ und $\int\left(-5x^3+e^x\right)dx=-\frac{5}{4}x^4+e^x$ schreiben. Die bekannten Regeln zum Bilden von Stammfunktionen können mit der neuen Schreibweise so formuliert werden:

- Summen werden summandenweise integriert: $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.
- Multiplikative Konstanten bleiben beim Integrieren stehen: $\int c\cdot f(x)dx=c\cdot\int f(x)dx$
- Integrieren von Potenzen: $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ für $n\neq-1$ und $\int\frac{1}{x}dx=\ln(x)$
- Integrieren der e -Funktion: $\int e^x dx=e^x$.

Im Folgenden wollen wir weitere Regeln kennen lernen, die uns helfen, Stammfunktionen zu bestimmen, oder – anders ausgedrückt: Funktionen zu integrieren.

3. partielle Integration (Produktintegration)

Wie lautet eine Stammfunktion zu $f(x)=x\cdot e^x$? Oder anders formuliert: Was ist $\int xe^x dx$?

Der Integrand ist hier Produkt von zwei Funktionen. Und da man nicht faktorenweise ableiten darf, darf man auch nicht faktorenweise aufleiten. Was also tun? In vielen Fällen, in denen die zu integrierende Funktion Produkt zweier Funktionen ist, hilft die **partielle Integration** weiter:

Satz. (Partielle Integration/Produktintegration) Wenn die Funktion g differenzierbar und zur Funktion h eine Stammfunktion H bekannt ist, kann das Integral $\int g(x)h(x)dx$ wie folgt berechnet werden: $\int g(x)h(x)dx = g(x)H(x) - \int g'(x)H(x)dx$.

Bei der partiellen Integration wird also einer der Faktoren integriert („aufgeleitet“) und der andere Faktor „abgeleitet“. Dabei wird immer zuerst aufgeleitet, dann zusätzlich abgeleitet. Partielle Integration kann in zwei Fällen gewinnbringend angewendet werden:

Fall 1. Es ist möglich, das „Restintegral“ $\int g'(x)H(x)dx$ zu berechnen.

Fall 2. Das „Restintegral“ $\int g'(x)H(x)dx$ ist ein Vielfaches des Ausgangsintegrals $\int g(x)h(x)dx$.

Wir stellen für jeden Fall ein Beispiel vor.

Beispiel 1. Berechne $\int xe^x dx$, d.h., bestimme eine Stammfunktion zu $f(x) = xe^x$. Wir wenden partielle Integration an und gehen dabei in drei Schritten vorn.

Schritt 1. Festlegen, welcher Faktor des Produkts $x \cdot e^x$ abgeleitet, welcher „aufgeleitet“ wird. Da der Faktor x beim Ableiten zu 1 wird und zu e^x eine Stammfunktion bekannt ist, legen wir fest: x wird abgeleitet, e^x wird „aufgeleitet“.

Schritt 2. Anwenden der Regel der partiellen Integration Tipp: Den abzuleitenden Faktor mit einem Ab-Pfeil, den aufzuleitenden Faktor mit einem Auf-Pfeil markieren: $\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{e^x}\, dx$. Die Regel der partiellen Integration besagt: zuerst den aufzuleitenden Faktor aufleiten und dann den abzuleitenden Faktor ableiten:

$$\int \underset{\downarrow}{x} \cdot \underset{\uparrow}{e^x}\, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

Schritt 3. Ausrechnen des Restintegrals. $\int 1 \cdot e^x dx = \int e^x dx = e^x$.

Also insgesamt $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x$.

Hätte man hier auch anders herum vorgehen können, also x aufleiten und e^x ableiten? Da wir eine Stammfunktion zu x kennen, spricht zunächst nichts dagegen:

$$\int \underset{\uparrow}{x} \cdot \underset{\downarrow}{e^x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x dx.$$

Jetzt ist jedoch das Restintegral viel komplizierter als das Ausgangsintegral, wir haben also nicht gewonnen! Beim Anwenden der partiellen Integration kann es also sein, dass man bei unglücklicher Wahl der auf- und abzuleitenden Funktion in eine Sackgasse läuft!

Beispiel 2. Wir wollen $\int \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^2\,dx$, also eine Stammfunktion zu $f(x)=\frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^2$ bestimmen.

Schritt 1. Festlegen, welcher Faktor des Produkts $\frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^2$ abgeleitet, welcher „aufgeleitet" wird. Da zu $(\ln(x))^2$ keine Stammfunktion bekannt ist, zu $\frac{1}{x}$ dagegen schon, nämlich $\ln(x)$, ist es sinnvoll festzulegen, dass $(\ln(x))^2$ abgeleitet und $\frac{1}{x}$ „aufgeleitet" wird:

$$\int \underset{\uparrow}{\frac{1}{x}}\cdot\underset{\downarrow}{(\ln x)^2}\,dx$$

Schritt 2. Anwenden der Regel der partiellen Integration. Die Ableitung von $g(x)=(\ln(x))^2$ ist nach der Kettenregel $g'(x)=2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}$. Eine Stammfunktion zu $h(x)=\frac{1}{x}$ ist $H(x)=\ln(x)$. Wir wenden partielle Integration an und Vereinfachen dann das Restintegral:

$$\int \underset{\uparrow}{\frac{1}{x}}\cdot\underbrace{(\ln(x))^2}_{\downarrow}dx=\ln(x)\cdot(\ln(x))^2-\int\ln(x)\cdot 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx=(\ln(x))^3-2\int\frac{1}{x}(\ln(x))^2\,dx\,.$$

Schritt 3. Behandeln des Restintegrals. Wir stellen fest: Das Restintegral kann nicht ausgerechnet werden, es stimmt mit dem ursprünglichen Integral überein. Idee: In der gefundenen Gleichung

$$\int \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^2\,dx=(\ln(x))^3-2\int\frac{1}{x}(\ln(x))^2\,dx$$

wird das rechte Integral addiert:

$$\int \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^2\,dx=(\ln(x))^3-2\int\frac{1}{x}(\ln(x))^2\,dx \qquad \Big| +2\int\frac{1}{x}(\ln(x))^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\int\frac{1}{x}(\ln(x))^2\,dx=(\ln(x))^3$$

Division durch 3 liefert die gesuchte Stammfunktion: $\int\frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx=\frac{1}{3}(\ln x)^3$

Beispiel 3. Stammfunktion des natürlichen Logarithmus $f(x)=\ln(x)$. Wir kennen bereits die Ableitung des natürlichen Logarithmus': $f'(x)=\frac{1}{x}$. Mit Hilfe der partiellen Integration können wir jetzt eine Stammfunktion zu $f(x)=\ln(x)$ finden. Aber Moment mal: f ist doch gar kein Produkt! Doch: $\ln(x)=\ln(x)\cdot 1$ (ein einfacher Trick, auf den man gar nicht so leicht kommt!) Jetzt wird festgelegt:

$$\int \underset{\downarrow}{\ln(x)} \cdot \underset{\uparrow}{1}\, dx .$$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int \ln(x)\, dx = \int \underset{\downarrow}{\ln(x)} \cdot \underset{\uparrow}{1}\, dx = \ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\, dx = \ln(x)\cdot x - \int 1 dx = \ln(x)\cdot x - x \ .$$

Also:

> **Satz (Integration des natürlichen Logarithmus).** $\int \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - x$

→ *Übung 1*

4. Eine einfache Version der Substitutionsregel

Was ist $\int 2x \cdot e^{x^2} dx$, wie lautet also eine Stammfunktion zu $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$? Hier hilft partielle Integration nicht weiter: Da wir nämlich keine Stammfunktion zu e^{x^2} kennen, müssten wir e^{x^2} ableiten und $2x$ integrieren:

$$\int \underset{\uparrow}{2x} \cdot \underset{\downarrow}{e^{x^2}}\, dx = x^2 \cdot e^{x^2} - \int x^2 \cdot 2xe^{x^2} dx .$$

Hier ist das Restintegral $\int x^2 \cdot 2xe^{x^2} dx = \int 2x^3 \cdot e^{x^2} dx$ sehr viel komplizierter als das Ausgangsintegral, partielle Integration führt hier also in eine Sackgasse!

Schauen wir uns den Integranden des Ausgangsintegrals, also $2x \cdot e^{x^2}$, noch einmal genauer an:

- Der Faktor e^{x^2} ist durch eine Verkettung von $h(x) = e^x$ mit $g(x) = x^2$ entstanden: $e^{x^2} = h(g(x))$.
- Der Faktor $2x$ ist die Ableitung der inneren Funktion dieser Verkettung.

Die zu integrierende Funktion ist also von der Form $h(g(x)) \cdot g'(x)$. Angenommen, man kennt eine Stammfunktion H zu der äußeren Funktion h, dann ist der Integrand $H'(g(x)) \cdot g'(x)$, und dies ist nichts anderes als die Ableitung der Funktion $H(g(x))$. Anders formuliert: $H(g(x))$ ist eine Stammfunktion zu $h(g(x)) \cdot g'(x)$. Dies ist die Aussage der Substitutionsregel:

> **Satz. (Version der Substitutionsregel)** Die Funktion g sei differenzierbar und H sei eine Stammfunktion der Funktion h. Dann gilt $\int h(g(x)) \cdot g'(x) dx = H(g(x))$.

Der Name „Substitutionsregel“ erklärt sich so: Um $\int h(g(x)) \cdot g'(x) dx$ zu berechnen, muss man $\int h(u) du$ bestimmen und dann darin u durch $g(x)$ ersetzen („substituieren“).

Wir berechnen $\int 2x \cdot e^{x^2} dx$ mit der Substitutionsregel: Mit $h(x)=e^x$ und $g(x)=x^2$ ist $f(x)=h(g(x))\cdot g'(x)$. Eine Stammfunktion zu $h(x)=e^x$ ist $H(x)=e^x$. Nach der Substitutionsregel ist $\int 2x \cdot e^{x^2} dx = H(g(x)) = e^{x^2}$.

In manchen Fällen muss zunächst die Funktion etwas umgeformt werden, bevor die Substitutionsregel angewendet werden kann.

Die Funktion $f(x)=x\cdot \ln(1+x^2)$ ist noch nicht von der Form, dass die Substitutionsregel verwendet werden kann: Es fehlt der Faktor 2. Lösung: Wir multiplizieren mit 2 und teilen durch 2:

$$\int x\cdot \ln(1+x^2)dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot \ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\cdot \int 2x\cdot \ln(1+x^2)dx.$$

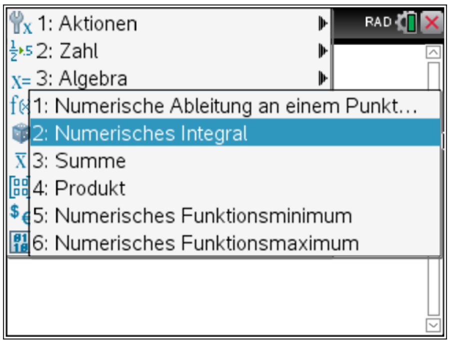
Jetzt berechnen wir $\int 2x\cdot \ln(1+x^2)dx$ mit der Substitutionsregel: Mit $h(x)=\ln(x)$ und $g(x)=1+x^2$ ist $2x\cdot \ln(1+x^2)=h(g(x))\cdot g'(x)$. Eine Stammfunktion zu $h(x)=\ln(x)$ ist $H(x)=x\cdot \ln(x)-x$. Nach der Substitutionsregel gilt deshalb

$$\int 2x\cdot \ln(1+x^2)dx = H(g(x)) = (1+x^2)\cdot \ln(1+x^2)-(1+x^2).$$

Also ist $\int x\cdot \ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\cdot \int 2x\cdot \ln(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\cdot\left((1+x^2)\cdot \ln(1+x^2)-(1+x^2)\right)$. → *Übung 2*

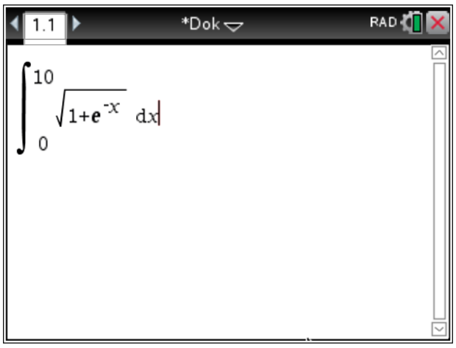
5. Numerische Berechnung von Integralen mit dem GTR

In vielen Fällen ist es nicht möglich, eine Stammfunktion des Integranden zu finden: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hat die durch $f(x)=\sqrt{1+e^{-x}}$ gegebenen stetige Funktion eine Stammfunktion, wir können aber keine Stammfunktion direkt bestimmen. Deshalb ist es für uns nicht möglich, das Integral $\int_0^{10}\sqrt{1+e^{-x}}dx$ mithilfe des Hauptsatzes zu berechnen. Wir könnten stattdessen das Integral mithilfe Riemannscher Summen approximieren. Auch gibt es in der Verfahren, mit denen sich das Integral näherungsweise berechnen lässt, z.B. die Keplersche Fassregel, die Sehnentrapezregel oder die Tangententrapezregel. Glücklicherweise hat der GTR eine Funktion zur numerischen Berechnung von Integralen eingebaut. Wir stellen die numerische Berechnung von Integralen mithilfe des GTR anhand der Berechnung des Integrals $\int_0^{10}\sqrt{1+e^{-x}}dx$ vor.



Wählen Sie $\boxed{\text{menu}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{2}$

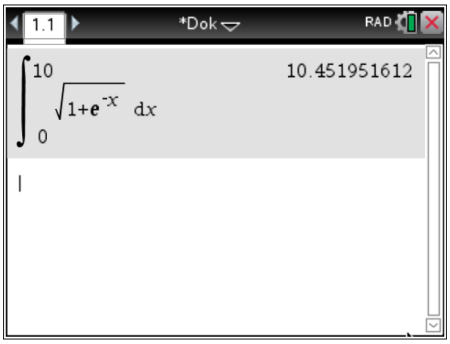
Die Vorlage zum Eingeben von Integralen kommt in die Anzeige.



Geben Sie die Integralgrenzen und den Integranden ein. Zwischen den verschiedenen Eingabefeldern wechseln Sie mit den Pfeiltasten auf dem Touchpad.

Drücken Sie enter

Der GTR berechnet den Wert des Integrals.



→ *Übung 3*

Übungen zur Lerneinheit
Integrationsmethoden – Wie man Integrale berechnet

Übung 1. Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen Stammfunktionen mithilfe partieller Integration. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Differenzieren.

a) $f(x)=2xe^x$ b) $f(x)=(1-x)e^x$ c) $f(x)=x^2e^x$

d) $f(x)=(3x^2+1)e^x$ e) $f(x)=x\ln(x)$ f) $f(x)=x^2\ln(x)$

g) $f(x)=(x^3-2x+1)\ln(x)$ h) $f(x)=\frac{1}{x^2}\ln(x)$ i) $f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$

Übung 2.

1. Berechnen Sie zu den folgenden Funktionen Stammfunktionen mithilfe mit Hilfe der Substitutionsregel. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Differenzieren.

   a) $f(x)=2x(1+x^2)^{10}$ b) $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ c) $f(x)=\frac{1}{1+x}$

   d) $f(x)=2x(1-x^2)^{10}$ e) $f(x)=(1-x)^{10}$ f) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$

   g) $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^3}$ h) $f(x)=\frac{x+5}{x^2+10x+30}$ i) $f(x)=e^{-x}$

   j) $f(x)=\frac{1}{1+e^x}e^x$ k) $f(x)=xe^{2-x^2}$ l) $f(x)=xe^{x^2}$

   m) $f(x)=\frac{1}{x}(\ln(x))^3$ n) $f(x)=\frac{1}{x}\ln(x)$ o) $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(1+\ln(x))^4}$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

   a) $\int_0^2(1-x)^3\,dx$ b) $\int_0^2\frac{1}{(1+x)^4}dx$ c) $\int_{-1}^0 x(1+x)^{10}\,dx$

   d) $\int_0^1 x^2(1+x)^{10}\,dx$ e) $\int_{-2}^0\frac{x^2}{(1-x^3)^2}dx$ f) $\int_0^1 xe^x dx$

   g) $\int_{-1}^1 x^2e^x dx$ h) $\int_0^2(4x-1)e^{-x}dx$ i) $\int_{-1}^1 xe^{x^2}dx$

   j) $\int_1^2 xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ k) $\int_1^{10}\frac{(\ln(x))^2}{x}dx$ l) $\int_e^{e^2}\ln(x)\cdot\left(x(\ln(x)-1)\right)^3dx$

Übung 3. Berechnen Sie mit dem GTR die folgenden Integrale

a) $\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ b) $\int_0^{10}\frac{1}{1+x^2}dx$ c) $\int_{-5}^5\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

d) $\int_1^{10}\frac{1}{1+\ln(x)}dx$ d) $\int_0^5\frac{1}{1+e^x}dx$ e) $\int_0^{10}e^{-x^2}dx$