Das Integral

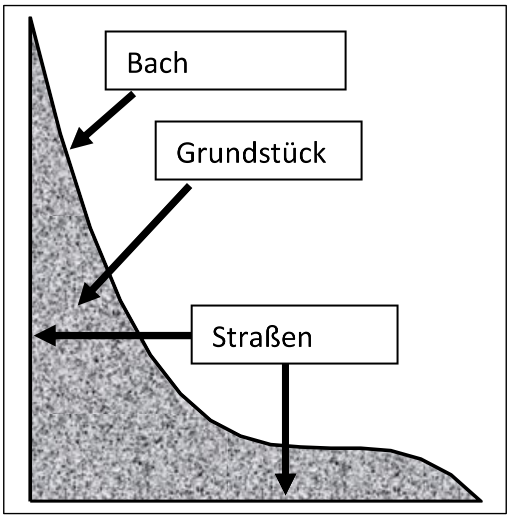
1. Ziele der Lerneinheit

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie

- wie der Flächeninhalt einer krummlinig begrenzten Fläche mithilfe Riemannscher Summen approximiert werden kann;
- dass sich bei stetigen Funktionen das Integral einer Funktion als Grenzwert Riemannscher Summen darstellen lässt;
- einige Rechenregeln für Integrale kennen;
- was man unter Stammfunktionen versteht und wie man sie in einfachen Fällen berechnen kann;
- dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion hat und Integrale mithilfe von Stammfunktionen berechnet werden können;
- dass die letzten beiden Aussagen der Inhalt des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sind;
- einen Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kennen;
- was ein unbestimmtes Integral ist;
- wie Integral und Flächeninhalt zusammenhängen.

2. Krummlinig begrenzte Flächenstücke und Riemannsche Summen

Krippe e.V. will für eine neue Kindertagesstätte ein Grundstück kaufen. Es liegt an der Kreuzung zweier Straßen und wird an den anderen Seiten von einem kleinen Bach begrenzt.



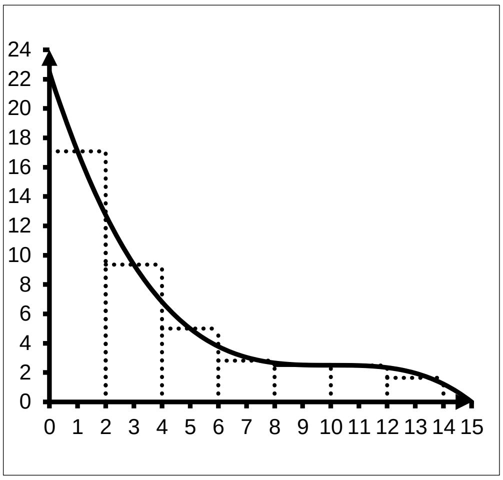
Der Bach verläuft entlang einer Strecke, die ungefähr dem im ersten Quadraten liegenden Teil des Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -0{,}02x^3 + 0{,}6x^2 - 6x + 22{,}5.$$

x und y sind dabei in Metern angegeben.

Frage: Wie groß ist das Grundstück im m²?

Um den Flächeninhalt dieser krummlinig begrenzten Fläche zumindest ungefähr zu bestimmen, geht eine Mitarbeiterin von Krippe e.V. so vor (siehe Grafik rechts):



Sie zeichnet den Graphen in ein Koordinatensystem.

Dann zeichnet sie Rechtecke in die Fläche ein, die von der x-Achse bis zum Funktionsgraphen laufen und diesen jeweils in der Mitte treffen.

Jedes Rechteck ragt zum Teil über den Funktionsgraphen hinaus, zum Teil endet es bereits darunter.

Im Großen und Ganzen sollte aber die Fläche aller Rechtecke zusammen ziemlich gut mit der gesuchten Fläche übereinstimmen.

Es muss nun die Flächengröße aller Rechtecke berechnet werden.

Die Fläche *eines* Rechtecks erhält man, indem man Länge mal Breite rechnet. Das bedeutet hier:

- Breite $=$ Abstand der beiden x-Werte, bei denen die linke und rechte Rechteckseite gezeichnet sind. Für das *erste* Rechteck ist das $2-0$, für das zweite Rechteck $4-2$ usw.
- Länge $=$ Höhe des Rechtecks. Das ist hier der Funktionswert in der Mitte der beiden x-Werte, bei denen die linke und rechte Rechteckseite gezeichnet sind. Für das erste Rechteck ist das $f(1)$, für das zweite $f(3)$, für das dritte $f(5)$ usw.

Für die Fläche *aller* Rechtecke muss man die Flächen der einzelnen Rechtecke addieren:

$$f(1)\cdot(2-0)+f(3)\cdot(4-2)+f(5)\cdot(6-4)+f(7)\cdot(8-6)$$
$$+f(9)\cdot(10-8)+f(11)\cdot(12-10)+f(13)\cdot(14-12)+f(15)\cdot(16-14)$$


Bernhard Riemann

Eine solche Summe nennt man auch eine **Riemannsche Summe**, benannt nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann (geboren 17. September 1826, gestorben 20. Juli 1866). Wir berechnen diese Riemannsche Summe:

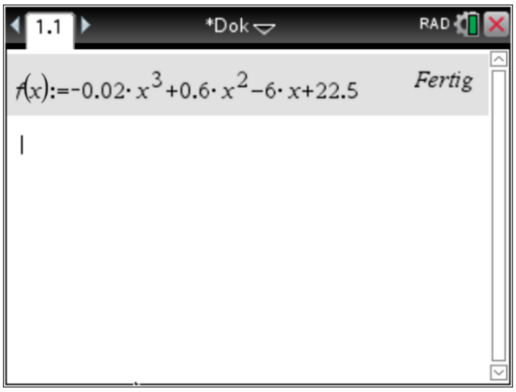
Die Differenzen $(2-0),(4-2),(6-4),\ldots,(16-14)$ in der Riemannschen Summe haben alle den Wert 2. Die Summe kann also vereinfacht werden zu

$$f(1)\cdot 2+f(3)\cdot 2+f(5)\cdot 2+f(7)\cdot 2+$$
$$+f(9)\cdot 2+f(11)\cdot 2+f(13)\cdot 2+f(15)\cdot 2$$

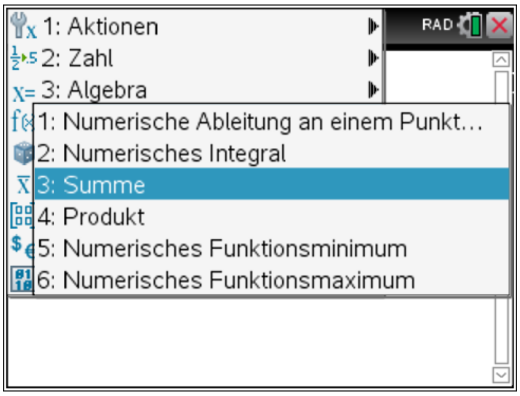
Bevor wir rechnen, klammern wir hier den Faktor 2 aus:

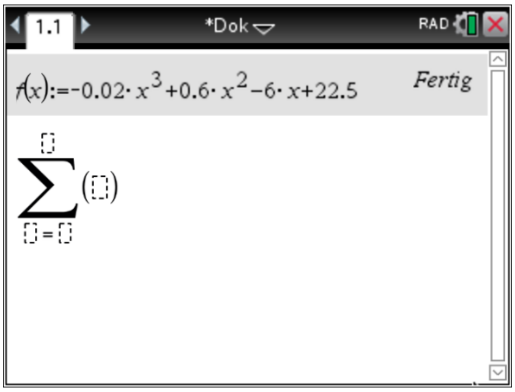
$$2\cdot\big(f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+$$
$$+f(9)+f(11)+f(13)+f(15)\big)$$

Den Term in der Klammer kann man einfach mit dem GTR berechnen. Dazu definieren Sie zunächst die Funktion f in Ihrem GTR.

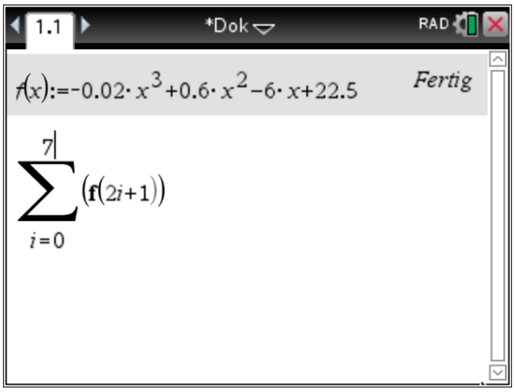


Wählen Sie dann menu 4 3

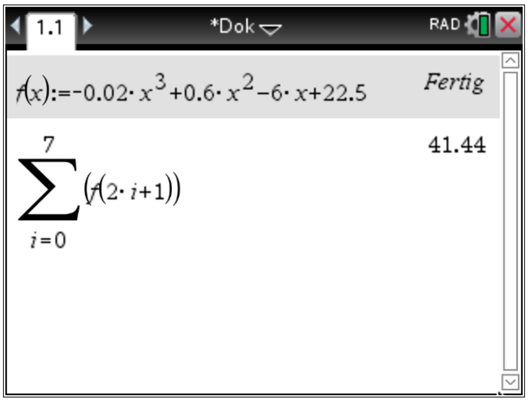




Der GTR stellt – siehe linke Abbildung – das mathematische Summenzeichen bereit. In der Summe kommen für x die Werte 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 und 15 vor, also alle ungeraden Zahlen bis 15. Diese erhält man, indem man in dem Term $2i+1$ für die Variable i nacheinander alle ganzen Zahlen von 0 bis 7 eingibt. Die linksstehende Eingabe weist den GTR an, genau dies zu tun, dann die Funktionswerte zu berechnen und abschließend alle berechneten Funktionswert zu addieren.



Durch Drücken von enter erhält man das Ergebnis: 41,44. Da diese Summe noch mit 2 multipliziert werden muss, ergibt sich eine Gesamtfläche der Rechtecke von 82,88 m^2. Dieser Wert gibt die ungefähre Flächengröße des Grundstücks an.



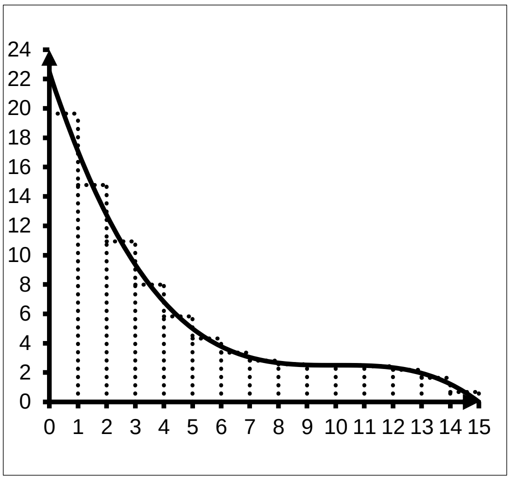
Um die Flächengröße genauer zu bestimmen, kann man die Breite der Rechtecke kleiner machen, zum Beispiel halbieren und mit Rechtecken der Breite 1 arbeiten, siehe Grafik unten. Im Vergleich zu vorher

- sind jetzt die Teile der Grundstücksfläche, die nicht ausgefüllt sind, kleiner.
- ragen jetzt die Rechtecke nur noch zu einem sehr geringen Teil über das Grundstück hinaus.

- sollte also die Fläche aller Rechtecke besser mit der gesuchten Fläche übereinstimmen.

Die entsprechende Riemannsche Summe sieht jetzt so aus:

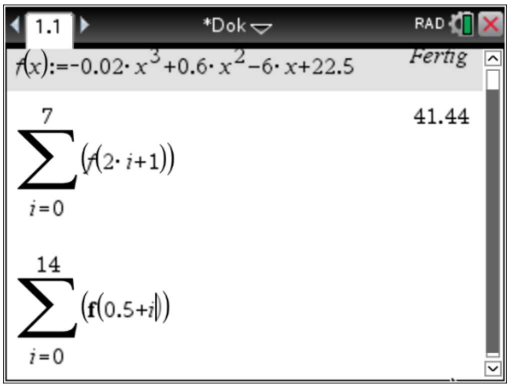
$$f(0{,}5)\cdot(1-0)+f(1{,}5)\cdot(2-1)+$$
$$+f(2{,}5)\cdot(3-2)+\ldots+f(12{,}5)\cdot(13-12)$$
$$+f(13{,}5)\cdot(14-13)+f(14{,}5)\cdot(15-14)$$



Zum Rechnen vereinfachen wir wie oben:

$$1\cdot\big(f(0{,}5)+f(1{,}5)+f(2{,}5)+f(3{,}5)+$$
$$+f(4{,}5)+f(5{,}5)+f(6{,}5)+f(7{,}5)+$$
$$+f(8{,}5)+f(9{,}5)+f(10{,}5)+f(11{,}5)+$$
$$+f(12{,}5)+f(13{,}5)+f(14{,}5)\big)$$

Um die Summe in der Klammer mit dem GTR leicht zu berechnen, überlegen wir, wie die für x eingesetzten Werte zu Stand kommen: Man erhält sie, indem man zu 0,5 jeweils eine der natürlichen Zahlen von 0 bis 14 addiert, wenn man also in dem Term $0{,}5+i$ für nacheinander die natürlichen Zahlen von 0 bis 14 einsetzt. Mit der rechtsstehenden Eingabe weisen Sie den GTR an, dies zu tun und die Funktionswerte zu berechnen und zu addieren. Es ergibt sich 84,1875. Da jetzt nur noch mit 1 multipliziert werden muss, ist dies der neue Näherungswert für Gesamtfläche der Rechtecke: 84,1875 m^2.



Um einen genauen Wert zu bekommen, bietet es sich an, schrittweise die Breite der Rechtecke zu verringern und die entsprechenden Riemannschen Summen zu berechnen. Wie bei der Berechnung der Tangentensteigung sollte – je mehr Schritte man rechnet, je kleiner also die Breite der Rechtecke ist – der berechnete Wert immer genauer mit dem tatsächlichen Wert übereinstimmen. Das ist in der Tat so, wenn f - wie im vorliegenden Fall – eine **stetige** Funktion ist, also eine Funktion, deren Graph man ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann:

Satz und Definition. Wenn f zwischen $x=a$ und $x=b$ stetig ist, dann nähern sich für immer kleiner werdende Rechtecksbreiten die Riemannschen Summen immer weiter einem Grenzwert an. Dieser Grenzwert wird das **Integral** von f über dem Intervall $[a\,|\,b]$ genannt und mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

Die Funktion f nennt man auch den **Integrand**, a heißt **untere Grenze** und b heißt **obere Grenze**.

Das Integralzeichen $\int$ ist ein stilisiertes S und erinnert daran, dass das Integral von Summen herstammt – in unserem Aufbau der Integralrechnung – von den Riemannschen Summen. Die

Summanden der Riemannschen Summen sind alle von der Art $f(x)(x_1-x_0)$. Für den Ausdruck (x_1-x_0) schreibt man auch manchmal symbolisch Δx. Die Summanden der Riemannschen Summen sind also alle von der Form $f(x)\Delta x$; hieran erinnert die Schreibweise $f(x)dx$ unter dem Integralzeichen.

Beispiel. Wir wollen $\int_0^5 (x+e^{-x})dx$ bestimmen, indem wir Riemannsche Summen mit immer kleiner werdenden Rechtecksbreiten berechnen. Da die Rechtecke immer gleich breit sein sollen und das Intervall, über dem das Integral berechnet werden soll, die Länge 5 hat, kommen als Rechteckbreiten nur Werte 5 (ein Rechteck), $5/2$ (zwei Rechtecke), $5/3$ (drei Rechtecke), also allgemein $5/N$ für N Rechtecke infrage. Diese N Rechtecke erstrecken sich dann auf der x-Achse

- von 0 bis $\frac{5}{N}$ (erstes Rechteck)
- von $\frac{5}{N}$ bis $2\cdot\frac{5}{N}$ (zweites Rechteck)
- von $2\cdot\frac{5}{N}$ bis $3\cdot\frac{5}{N}$ (drittes Rechteck)

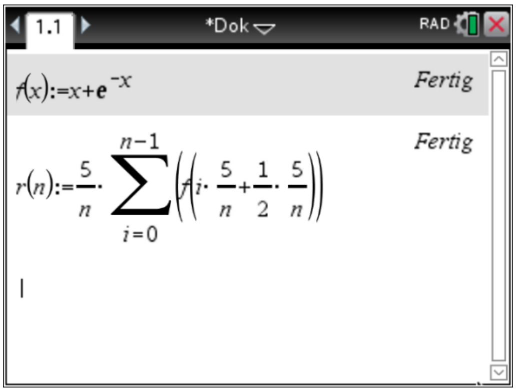
  $\vdots$
- von $(N-1)\cdot\frac{5}{N}$ bis $N\cdot\frac{5}{N}=5$ (N-tes Rechteck).

Die x-Werte in der Mitte, an denen man die Funktionswerte berechnet, erhält man jeweils, indem man zum linken Wert die Hälfte der Rechteckbreite addiert, also $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{N}$. Die Funktion in der Riemannschen Summe muss also berechnet werden an den Stellen

- $0+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{N}$ (erstes Rechteck)
- $\frac{5}{N}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{N}$ (zweites Rechteck)
- $2\cdot\frac{5}{N}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{N}$ (drittes Rechteck)

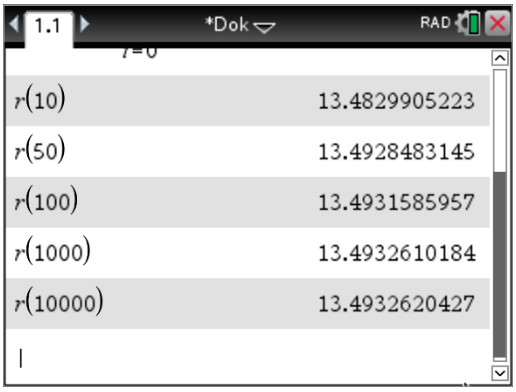
  $\vdots$
- $(N-1)\cdot\frac{5}{N}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{N}$ (N-tes Rechteck)

Die Riemannsche Summe (in Abhängigkeit von der Anzahl N der Rechtecke) kann man in den GTR dann wie rechts dargestellt eingeben.



Wir setzen jetzt für N verschiedene, immer größer werdende Werte ein, siehe rechts. Es ergibt sich:

$$\int_0^5 \left(x + e^{-x}\right) dx \approx 13{,}493262042653$$



Für das Rechnen mit Integralen gibt es ein paar einfache Rechenregeln, die wir kurz festhalten wollen.

→ *Übung 1*

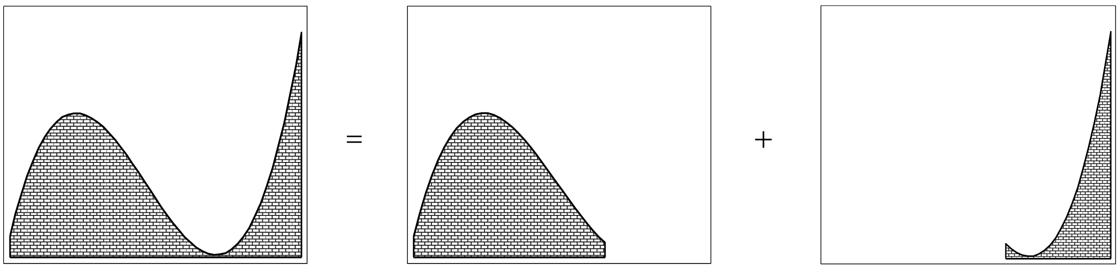
3. Rechnen mit Integralen

Das Integral stetiger Funktionen hat folgende Eigenschaften:

1. **Homogenität**: $\int_a^b \left(c \cdot f(x)\right) dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ für jede reelle Zahl c.
   Das heißt: Multiplikative Konstanten bleiben beim Integrieren erhalten.

2. **Linearität**: $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
   Das heißt: Integrale können summandenweise berechnet werden.

3. **Intervalladditivität**: Wenn $a < c < b$ gilt, dann ist $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.



$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_a^c f(x)\,dx \quad + \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

Das oben dargestellte Verfahren, Integrale mithilfe von Riemannschen Summen zu berechnen, erinnert an die Berechnung der Tangentensteigung mithilfe des Differenzenquotienten. Es ist ziemlich umständlich und zeitaufwändig. Aber wie bei der Berechnung der Tangentensteigung gibt es auch hier Regeln, die einen zumindest in vielen Fällen davor bewahren, mit Riemannscher Summen arbeiten zu müssen.

4. (K)ein Exkurs: Stammfunktionen

Ein Integral mithilfe Riemannscher Summen berechnen zu wollen, ist ein sehr umständliches Unterfangen. Ein Integral kann jedoch auch ohne Rückgriff auf die Riemannschen Summen direkt berechnet werden. Den Schlüssel zur direkten Berechnung eines Integrals bilden – wie wir bald sehen werden – die Stammfunktionen.

Definition. Eine Funktion F ist eine **Stammfunktion** zur Funktion f, falls $F'(x) = f(x)$ gilt.

Beispiele.

- Eine Stammfunktion zu $f(x)=3x^2$ ist $F(x)=x^3$, denn $F'(x)=3x^2$. Das heißt, f ist die Ableitung von F.
- Eine Stammfunktion zu $f(x)=x^2$ ist $F(x)=\frac{1}{3}x^3$, denn $F'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$. Das heißt, f ist die Ableitung von F.
- Eine Stammfunktion zu $f(x)=x^3$ ist $F(x)=\frac{1}{4}x^4$, denn $F'(x)=\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x^3$. Das heißt, f ist die Ableitung von F.

Sie erkennen sicher die Regel:

Stammfunktionen der Potenzfunktionen

Für jede Zahl $n\neq -1$ ist gilt $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ eine Stammfunktion zu $f(x)=x^n$.

…. denn $F'(x)=\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n=x^n=f(x)$!

Das Bilden von Stammfunktionen ist in gewisser Weise die Umkehrung des Ableitens. Deshalb gelten die folgenden Regeln:

Fundamentale Regeln zum Bilden von Stammfunktionen

(1) Stammfunktionen können summandenweise bestimmt werden.
(2) Multiplikative Konstanten bleiben beim Bilden von Stammfunktionen unverändert.

Beispiele.

- Eine Stammfunktion zu $f(x)=5x^2$ ist $F(x)=5\cdot\frac{1}{3}x^3=\frac{5}{3}x^3$, denn die multiplikative Konstante 5 bleibt unverändert.
- Eine Stammfunktion zu $f(x)=x^2+x^4$ ist $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, denn Stammfunktionen werden summandenweise gebildet.
- Eine Stammfunktion zu $f(x)=-3x^4+2x^2$ ist $F(x)=-\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3$, denn Stammfunktionen werden summandenweise gebildet.

Die Regel zum Bilden von Stammfunktionen bei Potenzen schließt den Fall $n=1$ aus. Es stellt sich also die Frage: Wie lautet eine Stammfunktion zu $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$? Die Antwort ist überraschend:

Eine Stammfunktion zu $f(x)=\frac{1}{x}$ ist $F(x)=\ln(x)$.

.... denn $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, wie wir schon wissen!

Und wie sieht es bei der e-Funktion aus?

Eine Stammfunktion zu $f(x) = e^x$ ist $F(x) = e^x$.

.... denn $(e^x)' = e^x$, wie wir schon wissen! → *Übung 2*

Hier ist immer von „einer" Stammfunktion die Rede – gibt es denn mehr als eine? Ja, wenn es *eine* Stammfunktion F zu f gibt, dann gibt es sogar unendlich viele: Für jede Zahl c ist dann nämlich durch $G(x) = F(x) + c$ eine weitere Stammfunktion gegeben, da die additive Konstante c beim Ableiten weg fällt. Addieren einer Konstanten ist aber auch die einzige Möglichkeit, von einer Stammfunktion zu einer anderen zu kommen:

Eindeutigkeit von Stammfunktionen. Zwei Stammfunktionen zu einer Funktion f unterscheiden sich höchstens um eine additive Konstante: Sind F und G Stammfunktionen der Funktion f, so gibt es eine Konstante c mit $G(x) = F(x) + c$ für alle x.

→ *Übung 3*

5. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- stellt einerseits sicher, dass zumindest alle stetigen Funktionen eine Stammfunktion haben, und
- gibt andererseits ein Verfahren an die Hand, wie man das Integral einer stetigen Funktion berechnet, wenn man eine Stammfunktion gefunden hat.

Zur Erinnerung: „stetig" bedeutet anschaulich, dass der Graph von f kann ohne den Stift abzusetzen gezeichnet werden. Formal besagt dies, dass sich $f(x_1)$ von $f(x_2)$ nur sehr wenig unterscheidet, wenn sich x_1 und x_2 nur sehr wenig unterscheiden. Kurz kann man dies so notieren: $x_1 \approx x_2 \Rightarrow f(x_1) \approx f(x_2)$.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).
Wenn f eine stetige Funktion ist, dann gilt:

(1) **Existenz von Stammfunktionen:** f hat eine Stammfunktion.

(2) **Berechnung des Integrals mithilfe einer Stammfunktion:**
Ist F irgendeine Stammfunktion zu f, so gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
Man schreibt auch manchmal kurz $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$.

Für Interessierte hier ein Beweis dieses sehr wichtigen Satzes der Mathematik.

Wir wenden uns zunächst Aussage (1) zu. Um (1) nachzuweisen werden wir zeigen, dass die durch

$$F_0(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

gegebene Funktion, die jedem x aus dem Intervall $[a\,|\,b]$ den Wert des Integrals der Funktion f von a bis zu diesem x zuordnet, eine Stammfunktion zu f ist. Hierzu müssen beweisen, dass für alle x_0 aus dem Intervall $[a\,|\,b]$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_0(x_0+h)-F_0(x_0)}{h} = f(x_0)$$

gilt. Dazu untersuchen wir zuerst den Nenner des Differenzenquotienten:

$$F_0(x_0+h)-F_0(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(u)\,du - \int_a^{x_0} f(u)\,du\,.$$

Um die Grundidee des Beweises nicht mit zu vielen technischen Problemen zu verschleiern, nehmen wir an, dass $h>0$ ist und dass stets $f(x)\geq 0$ gilt.[1] Wegen der Intervalladditivität des Integrals gilt dann

$$\int_a^{x_0+h} f(u)\,du = \int_a^{x_0} f(u)\,du + \int_{x_0}^{x_0+h} f(u)\,du\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} F_0(x_0+h)-F_0(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(u)\,du - \int_a^{x_0} f(u)\,du \\ &= \int_a^{x_0} f(u)\,du + \int_{x_0}^{x_0+h} f(u)\,du - \int_a^{x_0} f(u)\,du\,. \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(u)\,du \end{aligned}$$

Wir müssen somit den Term

$$\frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)\,du}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)\,du$$

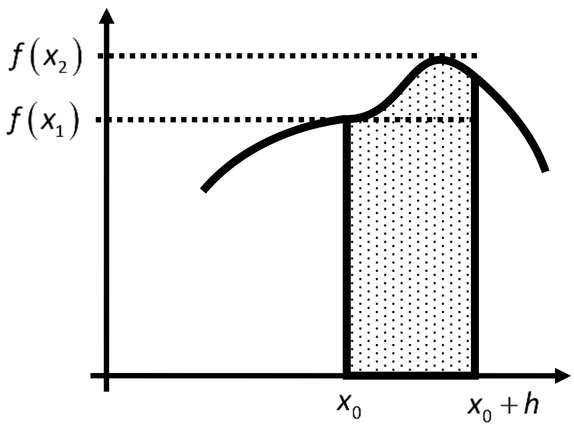
untersuchen und zeigen, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)\,du = f(x_0)$$

gilt.

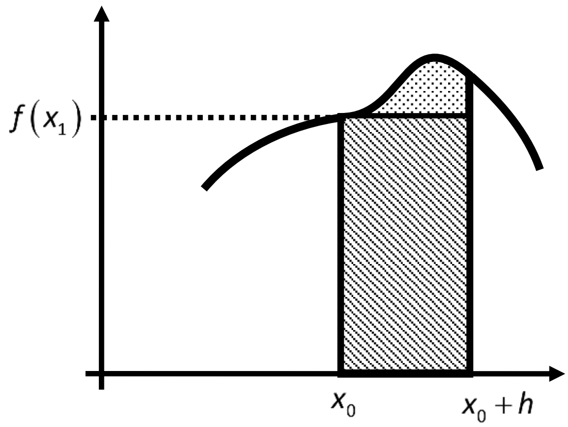
[1] Der Beweis kann mit den hier verwendeten Ideen leicht ohne jede Zusatzannahme zu einem in allen Punkten formal korrekten Beweis des Hauptsatzes präzisiert werden.

In der Skizze rechts entspricht $\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du$ der gepunktet eingezeichneten Fläche.



Die Skizze links legt nahe, dass es zwischen x_0 und x_0+h zwei Zahlen x_1 und x_2 gibt, sodass $f(x_1)$ der kleinste Funktionswert und $f(x_2)$ der größte Funktionswert zwischen x_0 und x_0+h ist, siehe Skizze links. Dass es diese beiden Zahlen gibt, ist eine Folge der Stetigkeit von f.

Wir betrachten nun das Rechteck, dessen untere Seite von x_0 bis x_0+h verläuft und das die Höhe $f(x_1)$ hat.



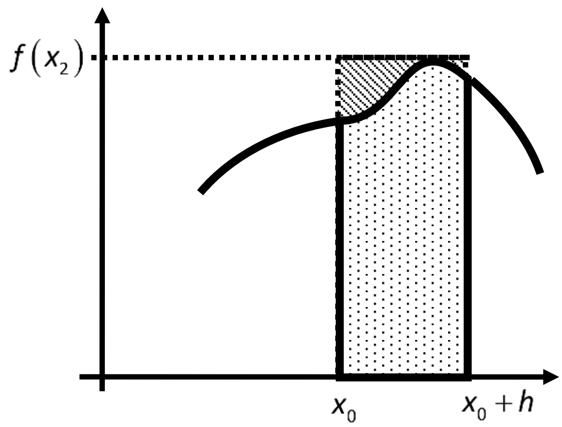
Dieses Rechteck hat den Flächeninhalt $f(x_1)\cdot h$, und dieser ist (siehe Skizze rechts) kleiner als der gepunktete Bereich, also als $\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du$. Dies bedeutet

$$f(x_1)h \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du,$$

und damit

$$f(x_1) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du.$$

Dagegen hat das Rechteck, dessen untere Seite ebenfalls von x_0 bis x_0+h verläuft, das aber die Höhe $f(x_2)$ hat einen Flächeninhalt, der größer als $\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du$ ist:



$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du \leq f(x_2)h,$$

also

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du \leq f(x_2).$$

Insgesamt finden wir die Ungleichungskette

$$f(x_1) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du \leq f(x_2).$$

Was passiert hier, wenn der Abstand h sehr nahe bei 0 liegt? Da x_1 und x_2 zwischen x_0 und $x_0 + h$ liegen, liegen dann x_1 und x_2 sehr nah bei x_0: $x_1 \approx x_0$ und $x_2 \approx x_0$. Da f stetig ist, ergibt sich daraus $f(x_1) \approx f(x_0)$ und $f(x_2) \approx f(x_0)$. Die Ungleichungskette

$$f(x_1) \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du \leq f(x_2)$$

wird deshalb zu

$$f(x_0) \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du \leq f(x_0).$$

Also müssen hier in Wirklichkeit alle Werte gleich sein:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(u)du = f(x_0).$$

Damit ist Aussage (1) des Hauptsatzes bewiesen. Nun beweisen wir Aussage (2) des Hauptsatzes. Wie eben nachgewiesen ist neben F auch die durch

$$F_0(x) = \int_a^x f(u)du$$

gegebene Funktion F_0 eine Stammfunktion zu f. Da sich je zwei Stammfunktionen nur um eine additive Konstante c unterscheiden, ist $F_0(x) = F(x) + c$ für eine gewisse Zahl c. Wie groß ist diese Zahl? Um dies herauszufinden, setzen wir in die Gleichung $F_0(x) = F(x) + c$ für x den Wert a ein:

$$F_0(a) = F(a) + c.$$

Wegen

$$F_0(a) = \int_a^a f(u)du = 0$$

bedeutet dies $0 = F(a) + c$, also $c = -F(a)$. Wir haben also $F_0(x) = F(x) - F(a)$. Nun setzen wir hier für x die Zahl b ein: $F_0(b) = F(b) - F(a)$. Wegen

$$F_0(b) = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx$$

bedeutet dies

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Damit ist auch Aussage (2) des Hauptsatzes bewiesen. ■

Das Integral einer stetigen Funktion f zu berechnen ist unproblematisch, wenn man *eine* Stammfunktion bestimmen kann. Dies ist in vielen (aber bei weitem nicht in allen!) Fällen möglich.

6. Integrale mithilfe von Stammfunktionen berechnen

Wir vereinbaren folgende Schreibweise, die durch den Hauptsatz motiviert wird: Wir schreiben

$$\int f(x)dx = F(x)$$

um anzudeuten, dass F eine Stammfunktion zu f ist. Die Schreibweise ist nützlich aber auch problematisch, da f viele verschiedene Stammfunktionen hat (die sich alle jeweils um eine additive Konstante unterscheiden), wohingegen die Schreibweise $\int f(x)dx = F(x)$ zu implizieren scheint, dass es nur eine Stammfunktion gebe.

$\int f(x)dx$ nennt man auch das **unbestimmte Integral** von f. Es gilt dann zum Beispiel:

- Für jede reelle Zahl $n \neq -1$ gilt $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$.
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$

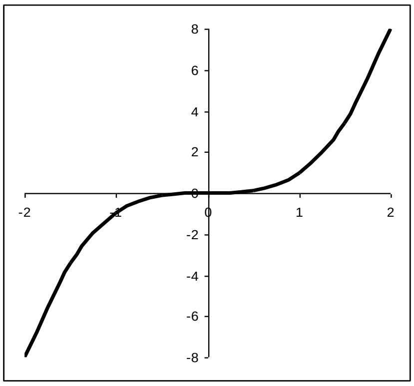
Wir berechnen beispielhaft ein paar Integrale:

1. Um das Integral $\int_0^5 x^2 dx$ zu berechnen, bestimmt man zunächst eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2$. Eine solche ist $\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$.
   Dann ergibt sich $\int_0^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = \frac{1}{3}\cdot 5^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{125}{3} = 41,\overline{6}$
2. Um $\int_1^4 \left(-x^2 + 4x + 5 + \frac{1}{x}\right)dx$ zu berechnen, bestimmt man eine Stammfunktion zu $f(x) = -x^2 + 4x + 5 + 1/x$, was, wie wir nun wissen, summandenweise geschehen kann:
   $$\int \left(-x^2 + 4x + 5 + 1/x\right)dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + \ln x\,.$$
   Dann ergibt sich
   $$\begin{aligned}
   \int_1^4 \left(-x^2 + 4x + 5 + \frac{1}{x}\right)dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + \ln x\right]_1^4 \\
   &= -\frac{1}{3}\cdot 4^3 + 2\cdot 4^2 + 5\cdot 4 + \ln 4 - \left(-\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + \ln 1\right) \\
   &= 32,053 - \frac{20}{3} \\
   &= 25,386
   \end{aligned}$$

3. $\int\limits_{-2}^{2} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot(-2)^4 = 4-4=0$

Was ist hier passiert? Wieso kann ist der Flächeninhalt hier Null? Dies stimmt offenbar nicht mit der Realität überein, wenn wir eine Skizze des Graphen der Funktion $f(x)=x^3$ zu Rate ziehen.

Das Integral stimmt hier nicht mit dem Flächeninhalt überein, weil der Integrand f im Integrationsintervall das Vorzeichen ändert!



→ *Übung 4*

7. Integral und Flächeninhalt

Offenbar stimmen Integral und Flächeninhalt nicht immer überein. Den genauen Zusammenhang zwischen Integral und Flächeninhalt ist im folgenden Kasten zusammengestellt:

- Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ stimmt **nur dann** mit dem Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraph und der x-Achse im Bereich von a bis b überein, wenn zwischen a und b stets $f(x)\geq 0$ ist.
- Ist zwischen a und b stets $f(x)\leq 0$, so ist $\int_a^b f(x)dx$ das **Negative** des Inhalts der Fläche zwischen dem Funktionsgraph und der x-Achse im Bereich von a bis b.
- Ändert f zwischen a und b ein- oder mehrmals sein Vorzeichen, so heben sich die Inhalte verschiedener Flächenstücke teilweise oder ganz gegenseitig weg und das Integral $\int_a^b f(x)dx$ kann **nicht** mehr als Flächeninhalt interpretiert werden.

Um deshalb den Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen der Funktion f und der x -Achse im Intervall von a bis b zu berechnen, müssen zuerst die zwischen a und b liegenden Nullstellen von f bestimmt werden. Man berechnet dann die Integrale

- von a bis zur ersten Nullstelle,
- zwischen allen direkt aufeinander folgenden Nullstellen und
- zwischen der letzten Nullstelle und b

Abschließend müssen die einzelnen Integralwerte addiert werden, wobei negative Werte mit einem positiven Vorzeichen genommen werden müssen.

Beispiele.

1. Wie groß ist die Fläche, die der Graph der durch $f(x)=x^3$ gegebenen Funktion zwischen -2 und 2 mit der x-Achse einschließt?
   Lösung: Zuerst werden die Nullstellen der Funktion $f(x)=x^3$ berechnet, die zwischen -2 und 2 liegen. Dies ist $x=0$.
   Nun werden die Integrale berechnet.

$$\int_{-2}^{0} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{1}{4}\cdot(-2)^4 = 0-4=-4$$

$$\int_{0}^{2} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2} = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot 0^4 = 4-0=4$$

Zum Abschluss werden die Integralwerte addiert, wobei negative Werte mit einem positiven Vorzeichen genommen werden müssen: Der Flächeninhalt ist $4+4=8$.

2. Wie groß ist die Fläche, die der Graph der durch $f(x)=x^4-10x^2+9$ gegebenen Funktion zwischen -4 und 2 mit der x-Achse einschließt?

   Lösung: Zuerst werden die Nullstellen der Funktion $f(x)=x^4-10x^2+9$ berechnet. Mit Hilfe der Substitutionsmethode findet man die Nullstellen -3, -1, 1 und 3. Da 3 nicht mehr zu dem Bereich gehört, über dem die Fläche berechnet werden muss, ist diese Nullstelle nicht von Interesse. Es müssen die folgenden Integrale berechnet werden:

   $\int_{-4}^{-3} f(x)dx$; $\int_{-3}^{-1} f(x)dx$; $\int_{-1}^{1} f(x)dx$; $\int_{1}^{2} f(x)dx$.

   Mit der Stammfunktion $\int f(x)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x$ findet man:

   $\int_{-4}^{-3} f(x)dx = 41{,}8\overline{6}$, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 11{,}7\overline{3}$,

   $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = -20{,}2\overline{6}$, $\int_{1}^{2} f(x)dx = -8{,}1\overline{3}$.

   Um den Inhalt der Fläche zu bestimmen, müssen die Werte jeweils mit positivem Vorzeichen addiert werden: $41{,}8\overline{6}+20{,}2\overline{6}+11{,}7\overline{3}+8{,}1\overline{3}=82$.

   Zum Vergleich: $\int_{-4}^{2} f(x)dx = 25{,}2$.

→ *Übung 5*

Übungen zur Lerneinheit *Das Integral*

Übung 1. Bestimmen Sie mithilfe Riemannscher Summen näherungsweise die Werte der folgenden Integrale.

a) $\int_0^4 x^2 dx$ b) $\int_0^6 x^3 dx$ c) $\int_0^5 \left(4x^2+5x+1\right) dx$

d) $\int_0^1 e^x dx$ e) $\int_0^{100} xe^{-x} dx$ f) $\int_0^{100} x^2 e^{-x} dx$

g) $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$ h) $\int_1^{10} \ln(x) dx$ i) $\int_1^{1000} \frac{1}{x}\cdot\ln(x) dx$

Übung 2. Bestimmen Sie zu den durch die Gleichungen angegebenen Funktionen je eine Stammfunktion.

a) $f(x)=3x$ b) $f(x)=-x^2$

c) $f(x)=4$ d) $f(x)=2x^3+x$

e) $f(x)=-3x^2+5x$ f) $f(x)=5x^4+2x^3-6$

g) $f(x)=0$ h) $f(x)=10x^9+5x^6-8x^2-3$

i) $f(x)=-x^7-4x^2+1$ j) $f(x)=3{,}5x^6+1{,}8x^3+x$

k) $f(x)=-x^4-x^3-x-1$ l) $f(x)=2x^{12}+15x^8-9x^4+2$

m) $f(x)=-3x^9-x^5+4x^4+2$ n) $f(x)=x^4+2x-3$

o) $f(x)=\frac{1}{x}$ p) $f(x)=\frac{2}{x}$

q) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ r) $f(x)=\frac{2}{x^3}$

s) $f(x)=7e^x$ t) $f(x)=5x^3+e^x$

u) $f(x)=\frac{1}{x}+3x^4$ v) $f(x)=\frac{1}{x}-e^x$

Übung 3. (für Ambitionierte!) Weisen Sie nach: *Sind F und G Stammfunktionen der Funktion f, so gibt es eine Konstante c mit $G(x)=F(x)+c$ für alle x.* Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Bilden Sie die Funktion $H(x)=G(x)-F(x)$.
- Weisen Sie nach, dass $H'(x)=0$ ist.
- Erläutern Sie: Wenn die Ableitung einer Funktion Null ist, ist die Funktion konstant.
- Verwenden Sie die letzten beiden Ergebnisse, um zu argumentieren, dass es eine Konstante c gibt, sodass $G(x)=F(x)+c$ gilt.

Übung 4. Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_{-2}^0 x dx$ b) $\int_0^2 (3x-2) dx$ c) $\int_{-1}^1 \left(x^4+3x^2+x\right) dx$

d) $\int_1^3 \left(x^3-2x^2-5x+6\right) dx$ e) $\int_0^2 e^x dx$ f) $\int_{-1}^1 \left(x+e^x\right) dx$

g) $\int_1^e \frac{1}{x}dx$ h) $\int_2^5 \left(x^4 - 3x^2 + \frac{1}{x}\right)dx$ i) $\int_{0,5}^1 \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx$

Übung 5. Berechnen Sie die Größe der Fläche, die zwischen a und b vom Graphen von f und der x -Achse begrenzt wird.

a) $f(x)=4x-2$, $a=0;\ b=1$

b) $f(x)=x^2-4$, $a=-3;\ b=3$

c) $f(x)=x^2-10x+21$, $a=-1;\ b=1$

d) $f(x)=x^3+3x+4$, $a=-2;\ b=1$

e) $f(x)=x^3-3x+2$, $a=0;\ b=1$

f) $f(x)=x^3-4x^2+x+6$, $a=-1;\ b=3$

g) $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$, $a=-2;\ b=3$

h) $f(x)=(x-1)(x^2-4)$, $a=-3;\ b=3$

i) $f(x)=x^4-2x^3+x^2-2x$, $a=-1;\ b=2$

j) $f(x)=x^4-5x^2+4$, $a=0;\ b=2$

k) $f(x)=e^x-1$, $a=-1;\ b=1$

l) $f(x)=\frac{1}{x}-x$, $a=0{,}5;\ b=2$