Die Bateman-Funktion als Beispiel eines exponentiellen Wachstums-prozesses

1. Ziele der Lerneinheit

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie

- die Bateman-Funktion kennen;
- wie die Bateman-Funktion mithilfe der Differentialrechnung untersucht wird;
- was der natürliche Logarithmus ist;
- wie mithilfe des natürlichen Logarithmus Exponentialgleichungen gelöst werden können;
- wie Gleichungen mithilfe des GTR numerisch gelöst werden können;
- wie der natürliche Logarithmus abgeleitet wird.

2. Bewegung eines medizinischen Wirkstoffs im Körper modellieren: Die Bateman-Funktion

Bei Medikamenten, die in Form von Tabletten, Kapseln, Pillen, als Tropfen oder als Saft oral verabreicht (also geschluckt) werden, werden die wirksamen Substanzen über Magen- und Darmwand vom Körper **absorbiert** (aufgenommen). Im Körper werden sie um- und abgebaut und ausgeschieden. Dieser Vorgang wird **Elimination** genannt.

Um mathematisch zu modellieren, wieviel Wirkstoff sich zu einem bestimmten Zeitpunkt nach der Einnahme des Medikaments noch im Körper befindet, entwickelte der Mathematiker Harry Bateman (geboren 29. Mai 1882, gestorben 21. Januar 1946) entwickelte die nach ihm benannte **Bateman-Funktion**.


Harry Bateman

Dabei wird die Geschwindigkeit, mit der der Wirkstoff vom Körper aufgenommen wird, durch eine **Absorptionskonstante** a ausgedrückt, und die Geschwindigkeit, mit der der Wirkstoff ausgeschieden wird, durch eine mit b bezeichnete **Eliminationskonstante**. In Abhängigkeit von der eingenommenen Dosis D hat dann eine (vereinfachte) Version der Bateman-Funktion die Gleichung

$$f(x) = D \cdot \frac{a}{a-b} \cdot \left(e^{-bx} - e^{-ax}\right)$$

Dabei ist $f(x)$ die Menge an Wirkstoff, die sich x Zeiteinheiten nach der Einnahme im Körper des Patienten befindet. $f(x)$ wird in der gleichen Einheit wie die Dosis D gemessen. Die Einheit der Zeit x korrespondiert zu der Zeiteinheit, in der a und b angegeben sind.

Beispiel. Metformin ist ein Medikament, das in Tablettenform zur Behandlung von Typ-II-Diabetes verwendet wird. Wir wollen annehmen, dass seine pharmakokinetischen[1] Eigenschaften näherungsweise mit der (vereinfachten) Bateman-Funktion von oben berechnet werden kann. Dabei wird eine Dosis von $D=1000$ mg eingenommen und es wird die stündliche Absorptionskonstante $a=0{,}7$ und die stündliche Eliminationskonstante $b=0{,}2$ vorausgesetzt.

Die Bateman-Funktion lautet dann

$$f(x)=1000\cdot\frac{0{,}7}{0{,}7-0{,}2}\cdot\left(e^{-0{,}2x}-e^{-0{,}7x}\right)=1400\cdot\left(e^{-0{,}2x}-e^{-0{,}7x}\right)$$

und $f(x)$ ist die Wirkstoffmenge in Milligramm, die sich x Stunden nach der Einnahme im Körper befindet. Wir berechnen exemplarisch die Wirkstoffmenge, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Körper befindet:

- eine Stunde nach der Einnahme: $f(1)=1400\cdot\left(e^{-0{,}2}-e^{-0{,}7}\right)=451{,}004$ mg;
- zwölf Stunden nach der Einnahme: $f(12)=1400\cdot\left(e^{-0{,}2\cdot 12}-e^{-0{,}7\cdot 12}\right)=126{,}69$ mg;
- 24 Stunden nach der Einnahme: $f(24)=1400\cdot\left(e^{-0{,}2\cdot 24}-e^{-0{,}7\cdot 24}\right)=10{,}425$ mg.

Wir untersuchen zunächst, zu welchem Zeitpunkt die Wirkstoffmenge wieder auf Null gesunken ist, das Medikament also vollständig aus dem Körper eliminiert ist. Dazu ist f auf Nullstellen zu untersuchen. Wir führen zunächst ein paar Äquivalenzumformungen durch, um die Gleichung $f(x)=0$ zu vereinfachen.

$$\begin{aligned}
f(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1400\cdot\left(e^{-0{,}2x}-e^{-0{,}7x}\right)=0 \,\big|\, :1400\\
&\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}2x}-e^{-0{,}7x}=0 \,\big|\, +e^{-0{,}7x}\\
&\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}2x}=e^{-0{,}7x} \,\big|\, :e^{-0{,}7x}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{e^{-0{,}2x}}{e^{-0{,}7x}}=1\\
&\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}2x-(-0{,}7x)}=1\\
&\Leftrightarrow \quad e^{0{,}5x}=1
\end{aligned}$$

Nun stehen wir vor einem Problem: Wir müssen auf der linken Seite, die Unbekannte x aus dem Exponenten „freikämpfen“. Dazu benötigen wir ein neues Hilfsmittel: den Logarithmus.

3. Der natürliche Logarithmus

Der natürliche Logarithmus, der mit $\ln$ bezeichnet wird, ist die Umkehrfunktion zur natürlichen Exponentialfunktion. Das heißt, beide Funktionen heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf:

[1] Pharmakokinetik = Lehre von den Konzentrationsveränderungen der Arzneistoffe im Organismus in Abhängigkeit von der Zeit

$$\ln\left(e^x\right)=x \text{ für alle } x\text{; und } e^{\ln x}=x \text{ für alle } x>0.$$

Die Werte des natürlichen Logarithmus können leicht mit dem Taschenrechner bestimmt werden. Ein paar Werte können wir aber mit der ersten der beiden Gleichungen auch so direkt berechnen:

- $\ln(e)=\ln\left(e^1\right)=1$;
- $\ln(1)=\ln\left(e^0\right)=0$.

Außerdem gelten für das Rechnen mit dem natürlichen Logarithmus gelten die folgenden **Logarithmengesetze**:

- $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$ für alle $a,b>0$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ für alle $a,b>0$
- $\ln\left(a^b\right)=b\cdot\ln(a)$ für alle $a>0$ und jedes b.

Wir zeigen anhand einiger Beispiele, wie man den Logarithmus verwenden kann, um Gleichungen zu lösen, in denen die natürliche Exponentialfunktion vorkommt.

Beispiel 1: Lösen der Gleichung $e^x=5$.

Schritt 1.	Auf beiden Seiten der Gleichung wird $\ln$ angewendet	$e^x=5 \mid \ln$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)=\ln(5)$
Schritt 2.	Auf der linken Seite wird angewendet, dass ln und e-Funktion invers zueinander sind: $\ln\left(e^x\right)=x$	$\Leftrightarrow x=\ln(5)\approx 1{,}6094$

Beispiel 2. Lösen der Gleichung $e^{3x^2+5}=10$

$e^{2x^2-5}=10 \quad |\ln$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x^2-5}\right)=\ln(10)$

$\Leftrightarrow 2x^2-5=2{,}3026$ (Anwenden, dass ln und e invers sind, und ausrechnen von $\ln(10)$)

$\Leftrightarrow 2x^2=7{,}3026 \quad |:2$

$\Leftrightarrow x^2=3{,}6513 \,|\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\pm 1{,}9108}}$

Mithilfe des natürlichen Logarithmus können auch manche Exponentialgleichungen gelöst werden, bei denen die Basis nicht die Eulersche Zahl ist. Dabei heißt eine Gleichung **Exponentialgleichung** , wenn die Unbekannte im Exponenten steht:

☺ $2^x=16$ ist eine Exponentialgleichung.

☹ $x^2=16$ ist *keine* Exponentialgleichung.

Auch hierzu ein *Beispiel* . Lösen der Exponentialgleichung $3 \cdot 6^x - 8 = 2 - 5 \cdot 6^x$

Schritt 1.	Alle Terme mit x werden auf eine Seite gebracht	$3 \cdot 6^x - 8 = 2 - 5 \cdot 6^x \quad \vert +8+5\cdot 6^x$ $\Leftrightarrow \; 8 \cdot 6^x = 10 \quad \vert :8$ $\Leftrightarrow \; 6^x = 1{,}25$
Schritt 2.	Auf beiden Seiten der Gleichung wird ln angewendet	$6^x = 1{,}25 \quad \vert \ln$ $\Leftrightarrow \; \ln\left(6^x\right) = \ln(1{,}25)$
Schritt 3.	Auf der linken Seite wird das dritte Logarithmengesetz $\ln\left(a^b\right) = b \cdot \ln(a)$ angewendet	$\Leftrightarrow \; x \cdot \ln(6) = \ln(1{,}25)$
Schritt 4.	Die letzte Gleichung kann sofort nach x aufgelöst werden	$x \cdot \ln(6) = \ln(1{,}25) \quad \vert : \ln(6)$ $\Leftrightarrow \; x = \frac{\ln(1{,}25)}{\ln(6)} \approx 0{,}1245$

→ *Übung 1*

4. Analyse einer Bateman-Funktion

Bei der durch $f(x) = 1400 \cdot \left(e^{-0,2x} - e^{-0,7x}\right)$ gegebenen Bateman-Funktion hatte uns die Untersuchung auf Nullstellen zu der Gleichung $e^{0,5x} = 1$ geführt. Diese können wir nun nach x auflösen:

$$
\begin{aligned}
& e^{0,5x} = 1 \,\vert\, \ln \\
\Leftrightarrow \quad & \ln\left(e^{0,5x}\right) = \ln(1) \\
\Leftrightarrow \quad & 0{,}5x = 0 \,\vert : 0{,}5 \\
\Leftrightarrow \quad & x = 0
\end{aligned}
$$

Dies bedeutet: Außer bei Einnahme des Medikaments (Zeitpunkt $x = 0$) befindet sich zu jedem Zeitpunkt immer eine (vielleicht auch nur sehr kleine) Menge Wirkstoff im Körper.

Es soll nun der Verlauf dieser Bateman-Funktion weiter analysiert werden, um folgende Fragen zu klären:

- Wie groß ist die maximale Wirkstoffmenge im Körper?
- Zu welchem Zeitpunkt liegt sie vor?
- Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Wirkstoffmenge im Körper am stärksten zu und am stärksten ab?
- Wie groß ist die stärkste Zu- bzw. Abnahme?

Wir berechnen zunächst die ersten drei Ableitungen:

- $f'(x) = 1400 \cdot \left(-0{,}2e^{-0,2x} + 0{,}7e^{-0,7x}\right)$
- $f''(x) = 1400 \cdot \left(0{,}04e^{-0,2x} - 0{,}49e^{-0,7x}\right)$
- $f'''(x) = 1400 \cdot \left(-0{,}008e^{-0,2x} + 0{,}343e^{-0,7x}\right)$

… und bestimmen nun die Extrempunkte. Bei der Berechnung der kritischen Stellen gehen wir analog zur Berechnung der Nullstellen vor:

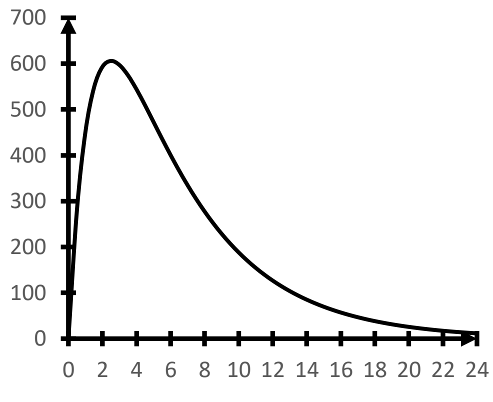
$$
\begin{aligned}
f'(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1400\left(-0{,}2e^{-0{,}2x}+0{,}7e^{-0{,}7x}\right)=0 \,\middle|\, :1400 \\
&\Leftrightarrow \quad -0{,}2e^{-0{,}2x}+0{,}7e^{-0{,}7x}=0 \,\middle|\, -0{,}7e^{-0{,}7x} \\
&\Leftrightarrow \quad -0{,}2e^{-0{,}2x}=-0{,}7e^{-0{,}7x} \,\middle|\, :e^{-0{,}7x} \\
&\Leftrightarrow \quad -0{,}2\cdot\frac{e^{-0{,}2x}}{e^{-0{,}7x}}=-0{,}7 \,\middle|\, :(-0{,}2) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{e^{-0{,}2x}}{e^{-0{,}7x}}=\frac{-0{,}7}{-0{,}2} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{-0{,}2x-(-0{,}7x)}=3{,}5 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{0{,}5x}=3{,}5 \,\middle|\, \ln \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(e^{0{,}5x}\right)=\ln(3{,}5) \\
&\Leftrightarrow \quad 0{,}5x=1{,}253
\end{aligned}
$$

Als einzige kritische Stelle ergibt sich $x=2{,}506$. Setzen wir dies in die zweite Ableitung ein, finden wir $f''(2{,}506)=-84{,}78<0\Rightarrow HP(2{,}506|605{,}861)$. Da der einige Randpunkt $x=0$ eine Nullstelle ist, bedeutet dies: Die höchste Metforminmenge ist nach rund 2½ Stunden erreicht und beträgt 605,861 mg.

Um die maximale Zu- und Abnahme der Wirkstoffmenge zu bestimmen, berechnen wir die Wendepunkte und setzen hierzu die zweite Ableitung Null. Mit Äquivalenzumformungen analog zu den bei der Berechnung der kritischen Stellen durchgeführten, finden wir:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 0{,}04e^{-0{,}2x}-0{,}49e^{-0{,}7x}=0\Leftrightarrow x=5{,}011$$

Überprüfen der dritten Ableitung: $f'''(5{,}011)=10{,}278>0\Rightarrow RLW(5{,}011|471{,}947)$.
Wir berechnen die Steigung im Wendepunkt $f'(5{,}011)=-73{,}413$ und am einzigen Randpunkt $x=0$ ist die Steigung: $f'(0)=700$. Dies bedeutet: Nach etwa 5 Stunden nimmt die Wirkstoffmenge am stärksten ab, nämlich um 73,413 mg pro Stunde. Und unmittelbar nach der Einnahme nimmt die Metforminmenge am stärksten zu, nämlich um 700 mg pro Stunde.



→ *Übung 2*

5. Berechnen der therapeutischen Konzentration

Als **therapeutische Konzentration** K wird die Arzneimenge bezeichnet, die *mindestens* im Körper sein muss, damit das Medikament wirkt. Um bei der Bateman-Funktion die Zeit zu bestimmen, während der therapeutische Konzentration vorliegt, ist die Gleichung

$$f(x)=K \Leftrightarrow D\cdot\frac{a}{a-b}\cdot\left(e^{-bx}-e^{-ax}\right)=K$$

nach x aufzulösen. Dies ist in der Regel nur Näherungsweise z.B. mit dem Newton-Verfahren oder mit der Solve- oder nSolve-Funktion eines CAS oder eines GTR möglich.

Nehmen wir an, bei Metformin liege die therapeutische Konzentration bei $K=150$ mg. Bei der oben untersuchten Bateman-Funktion mit der Gleichung

$$f(x)=1400\cdot\left(e^{-0{,}2x}-e^{-0{,}7x}\right)$$

ist dann die Gleichung

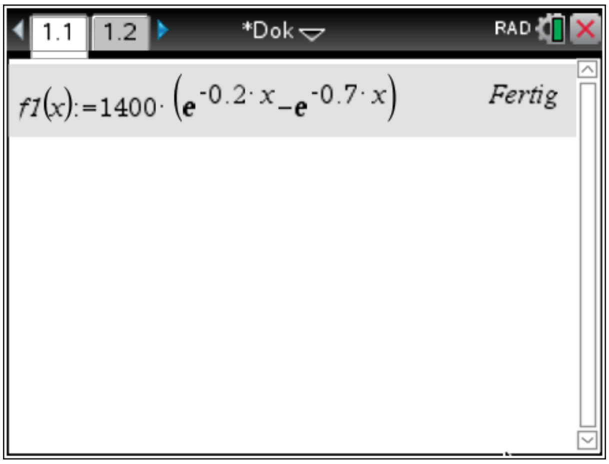
$$f(x)=150 \Leftrightarrow 1400\cdot\left(e^{-0{,}2x}-e^{-0{,}7x}\right)=150$$

zu lösen. Anhand dieser Gleichung lernen Sie im Folgenden, wie Gleichungen der Art $f(x)=y_0$ gelöst werden. Hierbei darf f eine beliebige Funktion sein. Die polyRoots-Funktion kann deshalb nicht verwendet werden. Damit Ihr GTR eine solche Gleichung lösen kann, wenn f keine ganzrationale Funktion ist, müssen Sie dem GTR eine ungefähre Lösung der Gleichung vorgeben. Der GTR berechnet dann numerisch die dieser Approximation am nächsten liegende Lösung exakt. Um zu einer ungefähren Lösung zu kommen, empfiehlt es sich, zunächst den Funktionsgraphen vom GTR zeichnen zu lassen.

Im Folgenden wird beschrieben, wie Sie zum Lösen der Gleichung

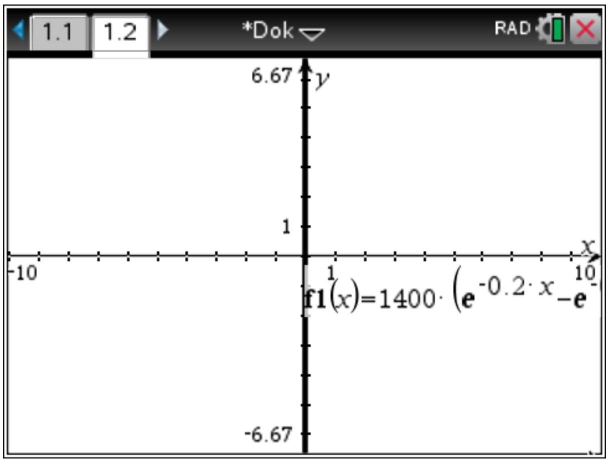
$$f(x)=150 \Leftrightarrow 1400\cdot\left(e^{-0{,}2x}-e^{-0{,}7x}\right)=150$$

vorgehen können.



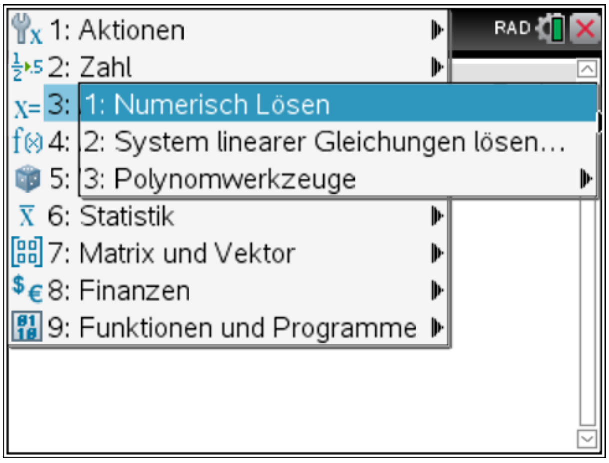
- Fügen Sie, falls noch nicht geschehen mit ctrl doc▾ 2 ein Grafikblatt hinzufügen
- ggf. mit ctrl ◀ auf das Rechenblatt wechseln
- Eingeben der Funktion als f1. Auf diese Weise kann man auf dem Grafikblatt des GTR darauf zugreifen.
- Um die ungefähre Lage der Lösungen zu finden, mit ctrl ▶ auf das Grafikblatt wechseln und mit ctrl G die Eingabezeile anzeigen lassen, sofern diese noch nicht angezeigt wird.

- (ggf. mehrmals) ▲ oder ▼ drücken, um die Funktion f1 in der Eingabezeile angezeigt zu bekommen und mit enter bestätigen. Der Graph wird gezeichnet.

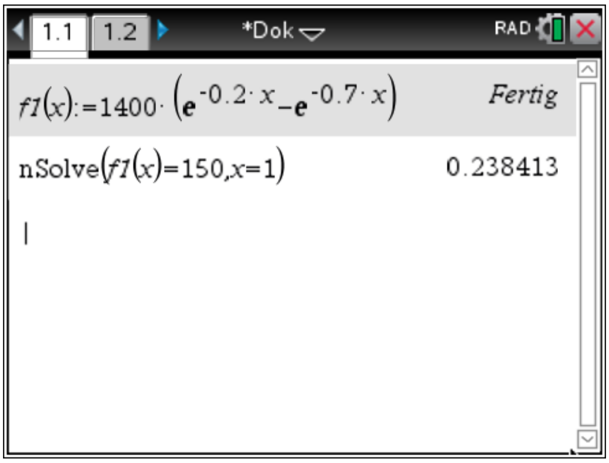


- Noch ist nicht viel zu sehen:
  - ➢ Der negative Teil der x-Achse wird nicht benötigt, ebenso der negative Teil der y-Achse.
  - ➢ Der positive Teil der x-Achse ist sehr knapp bemessen.
- Da das Funktionsmaximum bei etwas mehr als 600 liegt, sollte die y-Achse Werte bis (z.B.) 650 anzeigen.
  - ✓ Mit menu 4 1 die Fenstereinstellungen aufrufen.
  - ✓ Mit tab von einem Eingabefeld zum nächsten springen und z.B. XMin -1, XMax 15, X-Skala 1, YMin -50, YMax 650 und Y-Skala 50 eingeben. Danach mit enter bestätigen.

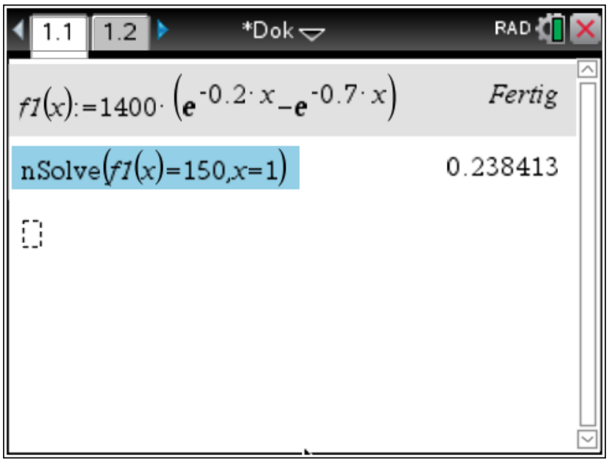
- Am Graphen sieht man die ungefähren Lösungen: $x=1$ sowie $x=12$. Möglich ist auch, sich mit menu 7 1 eine Wertetabelle anzeigen zu lassen, durch die man sich mit ▲ und ▼ bewegen kann.
- Jetzt können die Lösungen von $1400\cdot\left(e^{-0,2x}-e^{-0,7x}\right)=150$ mithilfe der Funktion nSolve berechnet werden.
- mit ctrl ◀ auf das Rechenblatt wechseln und mit menu 3 1 die Funktion nSolve aufrufen. (Sie können nSolve auch mit den Buchstabentasten eintippen.)
  Erläuterung:
  - ➢ *n* steht für „numerisch“,
  - ➢ *to solve* engl. für „lösen“



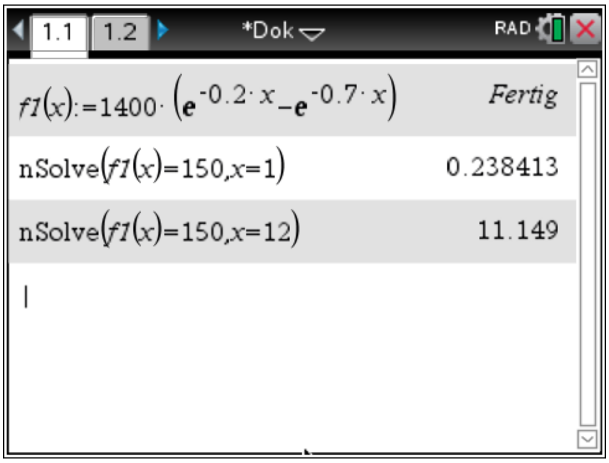
- Für die Lösung in der Nähe von $x=1$ folgendes eingeben *f1(x)=150,x=1*
- Nach **enter** berechnet der GTR die Lösung $x=0{,}238413$



- Für die Berechnung der zweiten Lösung tippe ▲, bis die letzte Eingabe blau unterlegt ist.
- Nach **enter** wird die alte Instanz der nSolve-Funktion in die Eingabezeile kopiert und kann jetzt mithilfe der Pfeiltasten ◀ und ▶ sowie der Taste **del** bearbeitet werden.



- Für die Lösung in der Nähe von $x=12$ dann folgendes eingeben *f1(x)=150,x=12*
- Nach **enter** berechnet der GTR die Lösung $x=11{,}149$



Dies bedeutet: Therapeutische Konzentration liegt ab etwa 0,24 Stunden nach der Einnahme (etwa 15 Minuten) bis 11,15 Stunden nach der Einnahme (etwa 11 Stunden und 9 Minuten) vor.

→ *Übung 3*

6. Die Logarithmusfunktion

Wir wollen die durch $f(x)=\ln(x)$ gegebene Logarithmusfunktion untersuchen.

Zunächst untersuchen wir die Funktion auf *Nullstellen*.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0.$$

Da $\ln$ und die e -Funktion invers zueinander sind, gilt $e^{\ln x} = x$. Deshalb kann x durch Anwenden der e -Funktion auf die Gleichung $\ln(x) = 0$ isoliert werden:

$$\ln(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Also ist $x = 1$ die einzige Nullstelle von f .

Um Hoch-, Tief- und Wendepunkte zu bestimmen, benötigen wir die Ableitungen von f . Mit folgenden Trick können wir der Ableitung von f auf die Spur kommen:

Da $\ln$ und die e -Funktion invers zueinander sind, gilt

$$e^{f(x)} = e^{\ln x} = x.$$

Beide Seiten der Gleichung $e^{f(x)} = x$ werden jetzt getrennt abgeleitet; beim Ableiten von $e^{f(x)}$ schreiben wir $f'(x)$ für die noch unbekannte Ableitung von f .

$e^{f(x)}$	$=$	x	
$\downarrow$		$\downarrow$	ableiten
$e^{f(x)} \cdot f'(x)$	$=$	1	jetzt links ausnutzen, dass $e^{f(x)} = e^{\ln x} = x$ ist
$x \cdot f'(x)$	$=$	1	nun wird diese Gleichung durch x dividiert
$f'(x)$	$=$	$\frac{1}{x}$	

Also:

Satz. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus, $f(x) = \ln x$, ist $f'(x) = \frac{1}{x}$.

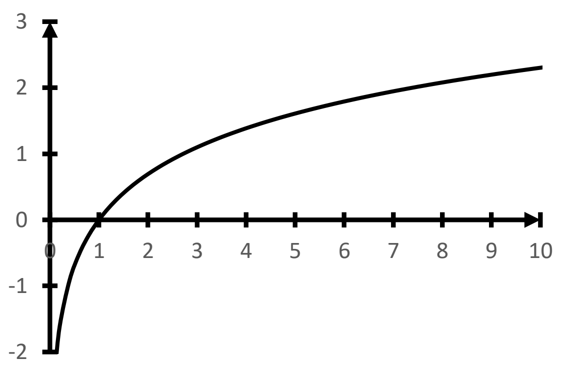
Die weiteren Ableitungen können wir nun mit der Potenzregel berechnen:

- $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $f''(x) = -x^{-2} \Rightarrow f'''(x) = 2x^{-3}$

Jetzt können die Hoch- und Tiefpunkte berechnet werden:

Da die Gleichung $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0$ keine Lösungen hat, gibt es keine kritischen Stellen, der Graph hat weder Hoch- noch Tiefpunkte

Weil auch die Gleichung $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = 0$ keine Lösungen hat, hat der Graph hat auch keine Wendepunkte. Der Graph ist rechts dargestellt.



→ *Übung 4*

Übungen zur Lerneinheit *Die Bateman-Funktion als Beispiel eines exponentiellen Wachstumsprozesses*

Übung 1.

1. Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

a)	$2^x = 65536$	b)	$1{,}5^x = 7{,}59375$	c)	$0{,}85^x = 0{,}32$
d)	$3^x - 5 = 2182$	e)	$0{,}936 + 0{,}4^x = 1$	f)	$10 - 0{,}5^x = -54$
g)	$2{,}5^x - 7{,}3 = 2{,}7 - 2{,}5^x$	h)	$0{,}75^x - 3{,}1 = -2{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}75^x$	i)	$4^x \cdot 0{,}2^x = 0{,}11$
j)	$\frac{42^x}{7^x} = 7776$	k)	$\frac{2^x}{5^x \cdot 1{,}6^x} = 10$	l)	$3^{\left(x^2\right)} = 19683$

2. a) Lassen Sie sich den Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = \ln x$ für $0{,}1 \le x \le 10$ von Ihrem GTR zeichnen.
   b) Auf ein Blatt Papier soll der im ersten Quadranten liegende Teil des Graphen der Funktion f aus Teilaufgabe a) gezeichnet werden. Dabei soll die y-Achse 10 cm lang sein und auf beiden Achsen soll 1 cm einer Einheit entspricht. Wie lang muss die x-Achse sein?
3. Ein Blatt herkömmliches Druckerpapier ist rund 0,012 cm dick. Durch Falten verdoppelt sich die Dicke des Blattes. Wie oft muss man das Blatt falten, damit das Blatt so dick ist wie der Abstand von der Erde zum Mond?
   Hinweis: Der Abstand von der Erde zum Mond beträgt ungefähr 370.000 km.

Übung 2.

1. Führen Sie die Berechnung des Wendepunktes, die im Text nur skizziert ist, detailliert aus.
2. Ein Patient nimmt eine Tablette mit 100 mg eines ACE-Hemmers ein. Die Entwicklung der Wirkstoffmenge im Körper soll mithilfe der Bateman-Funktion modelliert werden, wobei man von einer Absorptionsrate von 0,8 je Stunde und einer Eliminationsrate von 0,3 je Stunde ausgeht.
   a) Berechnen Sie, wie groß die Wirkstoffmenge im Körper jeweils nach 6 Stunden, 12 Stunden, 24 Stunden und 48 Stunden ist.
   b) Berechnen Sie, nach wie viel Stunden die größte Wirkstoffmenge im Körper ist und wie groß diese ist.
   c) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die größte Menge an Wirkstoff aus dem Körper ausgeschieden wird, und berechnen Sie, um wieviel Milligramm pro Stunde die Wirkstoffmenge maximal sinkt.
   d) Untersuchen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zunahme der Wirkstoffmenge im Blut am größten ist, und berechnen Sie, wie groß die maximale Zunahme je Stunde ist.
   e) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion mithilfe des GTR.
3. Ein Patient nimmt nach einer Zahnextraktion eine Tablette mit 10 mg eines Schmerzmittels ein. Die Wirkstoffmenge im Körper soll mithilfe der Bateman-Funktion modelliert werden, wobei eine Absorptionsrate von 0,6 und eine Eliminationsrate von 0,2 je Stunde anzunehmen ist.

Analysieren Sie sachgerecht die Entwicklung der Wirkstoffmenge im Körper des Patienten.

4. Untersuchen Sie die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen auf Nullstellen sowie auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
   Stellen Sie die Funktionsgraphen mithilfe des GTR dar.
   a) $f(x)=e^x+e^{-x}$ b) $f(x)=e^{-2x}-e^{-10x}$ c) $f(x)=e^{8x}-e^{4x}$

Übung 3.

1. Bestimmen Sie für die Bateman-Funktion im Lehrtext, $f(x)=1400\cdot\left(e^{-0,2x}-e^{-0,7x}\right)$, in welchen Zeiträumen therapeutische Konzentration vorliegt, wenn K die folgenden Werte hat:
   a) $K=50$ b) $K=300$ c) $K=500$

2. Ein Patient nimmt eine Tablette mit 100 mg eines ACE-Hemmers ein. Die Entwicklung der Wirkstoffmenge im Körper soll mithilfe der Bateman-Funktion modelliert werden, wobei man von einer Absorptionsrate von 0,8 je Stunde und einer Eliminationsrate von 0,3 je Stunde ausgeht.
   Berechnen Sie, wann therapeutische Konzentration vorliegt, wenn diese $K=10$ mg beträgt.

3. Ein Patient nimmt nach einer Zahnextraktion eine Tablette mit 10 mg eines Schmerzmittels ein. Die Wirkstoffmenge im Körper soll mithilfe der Bateman-Funktion modelliert werden, wobei eine Absorptionsrate von 0,6 und eine Eliminationsrate von 0,2 je Stunde anzunehmen ist.
   Für das eingenommene Schmerzmittel liegt die therapeutische Konzentration bei 1,75 mg. Bestimmen Sie den Zeitraum, während dessen therapeutische Konzentration vorliegt.

Übung 4.

Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen.

a) $f(x)=x\ln(x)$ b) $f(x)=x^2\ln(x)$ c) $f(x)=\left(5x^3-2\right)\cdot\ln(x)$

d) $f(x)=e^x\cdot\ln(x)$ e) $f(x)=\ln\left(x^2\right)$ f) $f(x)=\left(\ln(x)\right)^2$

g) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$