Die natürliche Exponentialfunktion

1. Ziele der Lerneinheit

In dieser Lerneinheit lernen Sie,

- was man in der Mathematik unter einer Differentialgleichung und einem Anfangswertproblem versteht;
- was die natürliche Exponentialfunktion ist und welche besondere Eigenschaft sie hat;
- wie man Produkte differenziert;
- was eine Verkettung von Funktionen ist, und wie man Funktionen ableitet, bei denen in die Exponentialfunktion eine Funktion eingesetzt ist;

2. Funktionen, die ihre eigene Ableitung sind

Bei ganzrationalen Funktionen hat die Ableitung einen einfacheren Funktionsterm als die Ursprungsfunktion, da stets ein Summand wegfällt und die Exponenten der Variablen sich jeweils um 1 verringern. Ist das immer so? Wir wollen die zunächst vielleicht abwegige Frage stellen, ob es eine Funktion f gibt, die ihre eigene Ableitung ist, für die also $f'(x) = f(x)$ gilt.

Die zunächst sehr schwer aussehende Frage hat eine überraschend einfache Antwort: Die Funktion $f(x) = 0$, die also konstant Null ist, erfüllt die Bedingung $f'(x) = f(x)$. Natürlich haben wir an diese Lösung eigentlich nicht gedacht, etwas anspruchsvoller sollte die Funktion schon sein. Man nennt eine sofort ersichtliche und in der Regel keine weiteren Erkenntnisse liefernde Lösung eines mathematischen Problems oft auch **triviale Lösung**.

Zu klären wäre also, ob es eine Lösung gibt, die nicht trivial ist. Eine solche muss zumindest an einer Stelle einen Wert ungleich Null annehmen, zum Beispiel $f(0) = 1$. Wir formulieren unser Problem also um:

Gibt es eine differenzierbare Funktion f mit $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = 1$?

Gleichungen, in denen eine gesuchte Funktion f über ihre Ableitungen charakterisiert wird, wie z.B. $f'(x) = f(x)$, nennt man in der Mathematik **Differentialgleichung**. Ist noch ein „Anfangswert" – wie hier $f(0) = 1$ – vorgegeben, spricht man von einem **Anfangswertproblem**.

Die Mathematiker haben herausgefunden, dass das Anfangswertproblem im Kasten durch genau eine Funktion gelöst wird, nämlich eine spezielle **Exponentialfunktion**. Was ist das: eine Exponentialfunktion? Wir kennen bereits Potenzfunktionen wie etwa $f(x) = x^2$. Bei diesen steht die Variable in der *Basis* steht und der Exponent ist konstant.

Bei Exponentialfunktionen ist das umgekehrt: die Variable steht im *Exponenten* und die Basis ist konstant:

Eine Funktion f heißt **Exponentialfunktion**, falls es eine Zahl $b>0$ gibt, sodass $f(x)=b^x$ ist.

Leider kann die Basis der Exponentialfunktion, die das Anfangswertproblem löst, nicht einfach angegeben werden.


Leonhard Euler

Wie die Zahlen $\sqrt{2}$ und π ist diese Zahl eine *irrationale* Zahl, also eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen und ohne Periode. Sie heißt **Eulersche Zahl**, benannt nach dem Schweizer Mathematiker **Leonhard Euler** (geboren 15. April 1707, gestorben 18. September 1783) und wird mit e bezeichnet. Die ersten Nachkommastellen der Zahl e sind:

$e =$ 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995
95749 66967 62772 40766 30353 54759 45713 82178 52516 64274 27466
39193 20030 59921 81741 35966 29043 57290 03342 95260 59563 07381
32328 62794 34907 63233 82988 07531 95251 01901 15738 34187 93070
21540 89149 93488 41675 09244 76146 06680 82264 80016 84774 11853
74234 …

Wer es genauer wissen möchte: Unter http://www.math.utah.edu/~pa/math/e.html findet man die ersten 10.000 Stellen von e. Wenn Sie die Eulersche Zahl e berechnen möchten und eine einfache Berechnungsmethode suchen, werden Sie nicht fündig werden. Aber es gibt Möglichkeiten, e beliebig genau zu approximieren (näherungsweise zu berechnen).

Eine Möglichkeit, die Eulersche Zahl e näherungsweise zu berechnen, besteht darin, im Term

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

sehr große natürliche Zahlen für n einzusetzen: Je größer die eingesetzte Zahl n ist, umso mehr der ersten Nachkommastellen von e_n stimmen mit den ersten Nachkommastellen von e überein. Für $n = 1.000.000$ ist zum Beispiel $e_{1.000.000} = 2{,}718280469$, die ersten fünf Nachkommastellen stimmen also mit der Zahl e überein. Mathematisch wird dieses sich immer weiter annähern durch den Ausdruck

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

bezeichnet.

Eine andere Möglichkeit, e zu approximieren, besteht darin, im Term

$$s_n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

sehr große natürliche Zahlen für n einzusetzen: Zum Beispiel stimmen in $s_9 = 2{,}7182815$ schon die ersten sechs Nachkommastellen mit der Eulerschen Zahl e überein. Es ist also auch

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right),$$

und die Werte nähern sich e noch viel schneller an als bei der Approximation mit e_n.

Gott sei Dank müssen Sie sich hiermit nicht herumschlagen, denn der Wert der Zahl e ist (mit genügend großer Genauigkeit) in Ihren Taschenrechner einprogrammiert.

Wir fassen zusammen:

Das Anfangswertproblem $f'(x)=f(x)$ und $f(0)=1$ wird durch die **natürliche Exponentialfunktion** $f(x)=e^x$ gelöst. Andere Lösungen gibt es nicht. Hierbei ist e die Eulersche Zahl, $e\approx 2{,}718$. Statt „natürliche Exponentialfunktion“ wird oft kurz ***e*-Funktion** gesagt.

Dass die e-Funktion die Differentialgleichung $f'(x)=f(x)$ erfüllt, bedeutet kurz gefasst:

Die Ableitung von e^x ist e^x!

Die Ableitungen der e-Funktion können deshalb ganz schnell berechnet werden:

- $f'(x)=e^x$
- $f''(x)=e^x$
- $f'''(x)=e^x$

Wir untersuchen den Verlauf des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion.

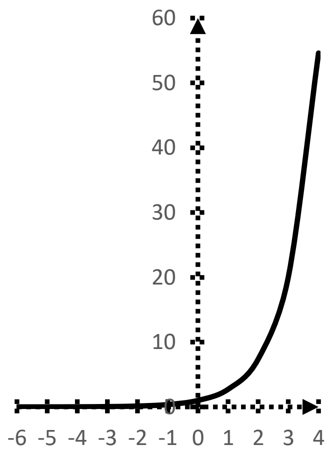
- Welche Nullstellen hat die e-Funktion?
  Wir halten zunächst die folgende Tatsache fest: Erhebt man eine positive Zahl (wie zum Beispiel 2 oder 3 oder 10 oder die Eulersche Zahl e) in eine beliebige Potenz, ist das Ergebnis stets positiv. Für die natürliche Exponentialfunktion bedeutet das: Die Werte von f sind alle positiv. Der Funktionsgraph verläuft stets oberhalb der x-Achse. Die e-Funktion hat *keine Nullstellen*.

- Welche Extrempunkte hat die e-Funktion?
  Weil e^x niemals den Wert Null annehmen kann, hat $f'(x)=e^x$ keine Nullstellen. Also hat f keine kritischen Stellen. Die e-Funktion hat deshalb *keine Hoch- und keine Tiefpunkte*.

  Weil e^x stets positiv ist, ist stets $f'(x)>0$. Dies bedeutet: Die Werte der e-Funktion nehmen mit zunehmenden x-Werten zu.

- Wie sieht es mit den Wendepunkten aus?
  Weil e^x niemals den Wert Null annehmen kann, hat $f''(x)=e^x$ keine Nullstellen.
  Die e-Funktion hat also *keine Wendepunkte*!

  Weil e^x stets positiv ist, ist stets $f''(x)>0$. Dies bedeutet: Der Graph der e-Funktion ist eine *Linkskurve*.



→ *Übung 1*

3. Eine erste Anwendung wird vorgestellt: eine Fieberkurve

Sandra hat sich eine Erkältung zugezogen, in deren Folge sich bei Sandra ein starkes Fieber einstellt. Die Fieberkurve kann modellhaft mit der durch

$$f(x) = x \cdot e^{-0{,}16x} + 36{,}5$$

gegebenen Funktion beschrieben werden. Dabei ist x die seit Beginn der Infektion vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die Körpertemperatur in $^\circ\mathrm{C}$. Natürlich ist es von Interesse, wie hoch Sandras Fieber wird, wann es am stärksten steigt und wann es schließlich am stärksten wieder sinkt. Um dies zu klären, müssten wir die Ableitungen von f berechnen. Leider kommt in dieser Funktion die natürliche Exponentialfunktion nicht „pur“ vor. Stattdessen wird sie mit der Funktion $g(x) = x$ multipliziert und überdies ist der Exponent nicht einfach die Variable, sondern die Variable wird im Exponenten der Eulerschen Zahl noch mit einer Konstante multipliziert. Wir müssen zunächst lernen, wie man in diesem Fall die Ableitung berechnen kann.

4. Die Produktregel

Bevor wir uns Sandras Fieberkurve zuwenden, wollen wir zunächst eine etwas weniger komplexe Funktion untersuchen, nämlich die Funktion f mit $f(x) = \left(x^2 - 4x + 4\right) \cdot e^x$

Zumindest die Nullstellen können wir hier sehr leicht mithilfe der Nullteilerfreiheit berechnen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4x + 4\right) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ oder } e^x = 0$$

Da e^x immer positiv ist, liefert allein die Gleichung $x^2 - 4x + 4 = 0$ alle Nullstellen. Mit der p-q ergibt sich als einzige Nullstelle $x = 2$.

Um jetzt aber die Hoch- und Tiefpunkte und dann die Wendepunkte zu bestimmen, müssen zuerst die Ableitung berechnet werden.

Das Problem hier ist: Der Term von f ist Produkt von zwei Funktionstermen, nämlich $x^2 - 4x + 4$ und e^x. Dafür benötigen wie eine neue Ableitungsregel:

> **Produktregel.** Gilt $f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$, wobei g_1 und g_2 differenzierbar sind, so ist f differenzierbar und die Ableitung wird so berechnet:
>
> $$f'(x) = g_1'(x) \cdot g_2(x) + g_1(x) g_2'(x).$$
>
> Also: Erster Faktor abgeleitet mal zweiter Faktor unabgeleitet plus erster Faktor unabgeleitet mal zweiter Faktor abgeleitet.

Mit dieser Produktregel können wir nun f ableiten

$$f(x)=\underbrace{\left(x^2-4x+4\right)}_{g_1(x)}\cdot \underbrace{e^x}_{g_2(x)} \Rightarrow f'(x)=\underbrace{(2x-4)}_{g_1'(x)}\cdot \underbrace{e^x}_{g_2(x)} + \underbrace{\left(x^2-4x+4\right)}_{g_1(x)}\cdot \underbrace{e^x}_{g_2'(x)}$$

Sinnvollerweise wird hier noch e^x ausgeklammert und dann zusammengefasst:

$$f'(x)=\left[(2x-4)+\left(x^2-4x+4\right)\right]\cdot e^x=\left(x^2-2x\right)\cdot e^x$$

Genauso wird die zweite Ableitung berechnet:

$$f'(x)=\underbrace{\left(x^2-2x\right)}_{g_1(x)}\cdot \underbrace{e^x}_{g_2(x)} \Rightarrow f''(x)=\underbrace{(2x-2)\cdot e^x}_{g_1'(x)\cdot g_2(x)}+\underbrace{\left(x^2-2x\right)\cdot e^x}_{g_1(x)\cdot g_2'(x)}=\left(x^2-2\right)\cdot e^x$$

Und die dritte Ableitung:

$$f''(x)=\underbrace{\left(x^2-2\right)}_{g_1(x)}\cdot \underbrace{e^x}_{g_2(x)} \Rightarrow f'''(x)=\underbrace{2x\cdot e^x}_{g_1'(x)\cdot g_2(x)}+\underbrace{\left(x^2-2\right)\cdot e^x}_{g_1(x)\cdot g_2'(x)}=\left(x^2+2x-2\right)\cdot e^x$$

Um die *Extrempunkte* von f zu bestimmen, berechnen wir zuerst die kritischen Stellen:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)\cdot e^x \Leftrightarrow x^2-2x=0 \text{ oder } e^x=0$$

Da e^x immer positiv ist, liefern nur die Lösungen der Gleichung $x^2-2x=0$ die kritischen Stellen. Diese sind $x=0$ sowie $x=2$. Durch Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt sich

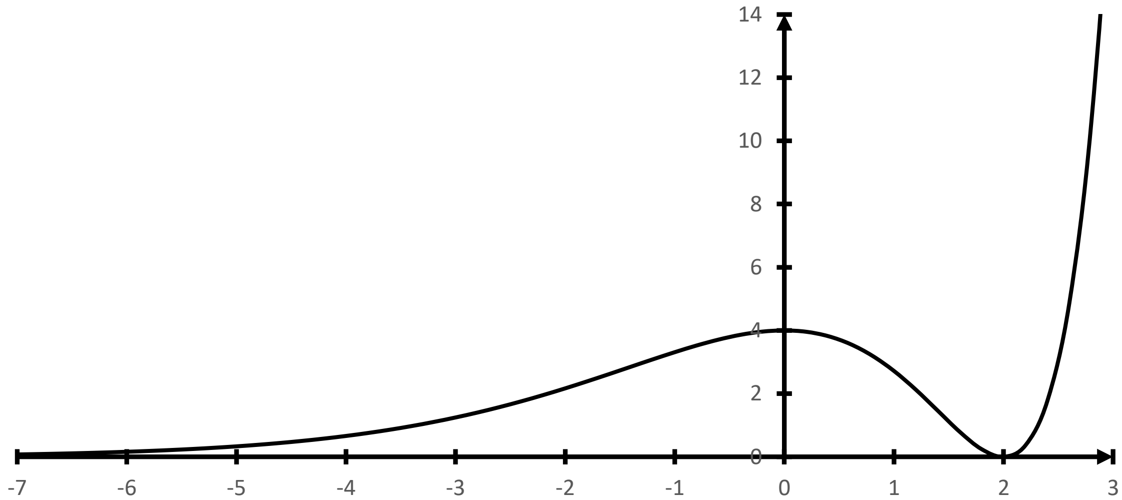
$$f''(0)=-2\cdot e^0=-2<0 \Rightarrow \text{HP}(0|4) \text{ und } f''(2)=2\cdot e^2>0 \Rightarrow \text{TP}(2|0).$$

Um die Wendepunkte von f zu berechnen, setzen wir die zweite Ableitung Null:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x^2-2=0 \text{ oder } e^x=0.$$

Da e^x immer positiv ist, liefert nur die Gleichung $x^2-2=0$ die Lösungen nämlich $x=\pm\sqrt{2}$.
Durch Einsetzen in die dritte Ableitung ergibt sich:

$$f'''\left(\sqrt{2}\right)=11{,}63>0 \Rightarrow \text{RLW}\left(\sqrt{2}\,|\,1{,}4114\right) \text{ und } f'''\left(-\sqrt{2}\right)=-0{,}69<0 \Rightarrow \text{LRW}\left(-\sqrt{2}\,|\,2{,}834\right).$$



→ *Übung 2*

5. Die Kettenregel

Wir können nun bereits Funktionen ableiten, bei denen die e-Funktion mit einer anderen Funktion multipliziert wird, indem wir die Produktregel verwenden. Jetzt soll es um Funktionen gehen, bei denen in die e-Funktion eine weitere Funktion *eingesetzt* ist, wie zum Beispiel bei der durch $f(x)=e^{-x^2}$ gegebenen Funktion. Hier ist in die e-Funktion die Funktion g mit $g(x)=-x^2$ eingesetzt. Man sagt, dass die e-Funktion mit g verkettet ist, und nennt g auch manchmal die innere Funktion:

> Die Funktion f ist die **Verkettung** von h und g, wenn $f(x)=h(g(x))$ ist. $f(x)$ entsteht also, indem in h jedes Vorkommen der Variablen durch den Term $g(x)$ ersetzt wird. Dies wird auch so ausgedrückt: f entsteht, indem g in h eingesetzt wird.
>
> Die innen stehende und zuerst zu berechnende Funktion g heißt **innere Funktion** und die außen, als letztes zu berechnende Funktion h heißt **äußere Funktion**.

Beispiele für verkettet Funktionen.

- $f(x)=e^{2x+3}$ entsteht, indem in die e-Funktion für x die Funktion $h(x)=2x+3$ eingesetzt wird.
- $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ entsteht, indem in die Wurzelfunktion $h(x)=\sqrt{x}$ für x die Funktion $g(x)=1+x^2$ eingesetzt wird.
- $f(x)=\left(3x^4+5x^2+1\right)^{10}$ entsteht, indem in die Funktion $h(x)=x^{10}$ für x die Funktion $g(x)=3x^4+5x^2+1$ eingesetzt wird.

→ *Übung 3*

Für das Ableiten verketteter Funktionen gibt es auch eine Regel, die Kettenregel.

> **Satz (Kettenregel).** Wenn f entsteht, indem man die differenzierbare Funktion g in die differenzierbare Funktion h einsetzt, $f(x)=h(g(x))$, dann ist f differenzierbar und es gilt
>
> $$f'(x)=h'(g(x))\cdot g'(x).$$
>
> Also: In die Ableitung der äußeren Funktion wird die innere Funktion unabgeleitet eingesetzt und dies wird mit der Ableitung der inneren Funktion multipliziert.
>
> **Spezialfall:** Wenn f entsteht, indem man die differenzierbare Funktion g in die e-Funktion einsetzt, $f(x)=e^{g(x)}$, dann ist f differenzierbar und es gilt
>
> $$f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x).$$

Beispiel. Ableiten von $f(x)=e^{-x^2}$ mit dem Spezialfall der Kettenregel. In diesem Fall ist in die e-Funktion die Funktion $g(x)=-x^2$ eingesetzt, die die Ableitung $g(x)=-2x$ hat. damit ergibt sich: $f'(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2x\cdot e^{-x^2}$.

Beispiel. Berechnen der zweiten Ableitung von $f(x)=e^{-x^2}$.
In diesem Fall muss $f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}$ abgeleitet werden. Dies ist das Produkt der Funktionen $g_1(x)=-2x$ und $g_2(x)=e^{-x^2}$. Es muss also auf jeden Fall die Produktregel angewendet werden. Innerhalb der Produktregel muss für das Ableiten des zweiten Faktors $g_2(x)=e^{-x^2}$ dann die Kettenregel verwendet werden: $g_2{}'(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)=-2x\cdot e^{-x^2}$

$$f'(x)=\underset{g_1(x)}{-2x}\cdot\underset{g_2(x)}{e^{-x^2}}\Rightarrow f''(x)=\underbrace{-2\cdot e^{-x^2}}_{g_1'(x)\cdot g_2(x)}+\underbrace{(-2x)\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)}_{g_1(x)\cdot g_2'(x)}$$

Hier fassen wir zusammen und klammern dann e^{-x^2} aus:

$$f''(x)=-2\cdot e^{-x^2}+(-2x)\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)=-2\cdot e^{-x^2}+4x^2\cdot e^{-x^2}=\left(-2+4x^2\right)\cdot e^{-x^2}$$

Also ist $f''(x)=\left(4x^2-2\right)\cdot e^{-x^2}$.

Ganz ähnlich wird die dritte Ableitung berechnet:

$$f''(x)=\underbrace{\left(4x^2-2\right)}_{g_1(x)}\cdot\underset{g_2(x)}{e^{-x^2}}\Rightarrow f'''(x)=\underbrace{8x\cdot e^{-x^2}}_{g_1'(x)\cdot g_2(x)}+\underbrace{\left(4x^2-2\right)\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)}_{g_1(x)\cdot g_2'(x)}$$

Auch hier fassen wir zusammen und klammern dann e^{-x^2} aus:

$$f'''(x)=8x\cdot e^{-x^2}+\left(4x^2-2\right)\cdot\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)=\left(8x+\left(4x^2-2\right)\cdot(-2x)\right)\cdot e^{-x^2}=\left(-8x^3+12x\right)\cdot e^{-x^2}$$

Nachdem nun alle Ableitungen der durch $f(x)=e^{-x^2}$ gegebenen Funktion berechnet sind, können wir diese Funktion auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte untersuchen.

Um die Hoch- und Tiefpunkte zu bestimmen, setzen wir die erste Ableitung Null:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -2x\cdot e^{-x^2}\Leftrightarrow x=0 \text{ oder } e^{-x^2}=0$$

Da die e-Funktion nie Null werden kann, hat $e^{-x^2}=0$ keine Lösung. Die einzige kritische Stelle ist also $x=0$. Setzt man dies in die zweite Ableitung ein, ergibt sich

$$f''(0)=-2<0\Rightarrow \text{HP}(0|1).$$

Beim Nullsetzen der zweiten Ableitung im Rahmen der Wendepunktberechnung nimmt man wieder die Nullteilerfreiheit und die Tatsache, dass die e-Funktion nie Null werden kann, zu Hilfe:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(4x^2-2\right)\cdot e^{-x^2} \Leftrightarrow 4x^2-2=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{0,5}\approx\pm 0,707$$

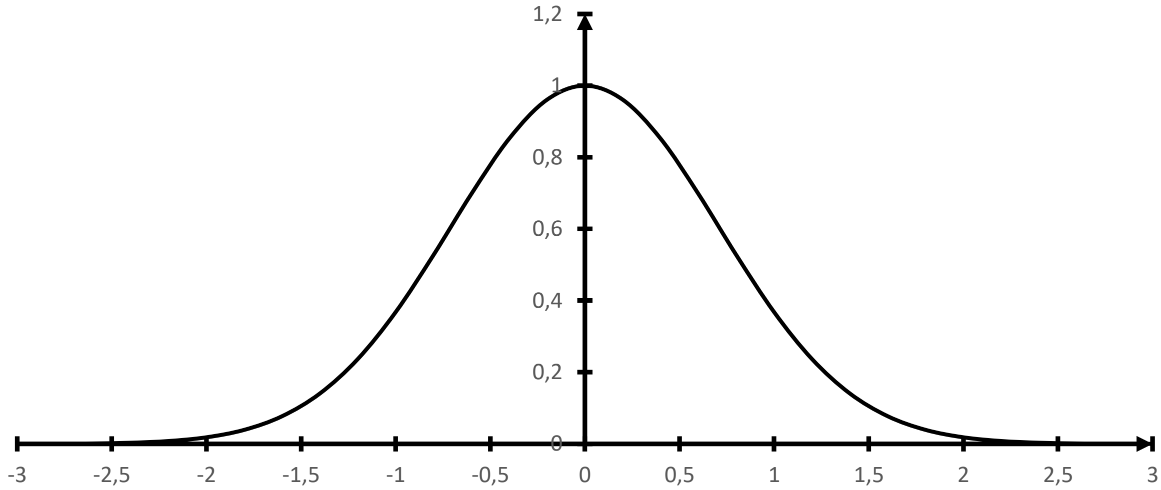
Einsetzen in f''' liefert:

$$f'''(0,707)=2,318>0 \Rightarrow \text{RLW}(0,707|0,607)$$

und

$$f'''(-0,707)=-2,318<0 \Rightarrow \text{LRW}(-0,707|0,607).$$

→ *Übung 4*



6. Analyse der Fieberkurve

Um bei Sandra anhand ihrer durch $f(x)=x\cdot e^{-0,16x}+36,5$ gegeben Fieberkurve zu bestimmen, wie hoch ihr Fieber wird, wann es am stärksten steigt und wann es schließlich am stärksten wieder sinkt, werden wir die Hoch- und Tiefpunkte sowie die Wendestellen berechnen. Zuerst bestimmen wir die Ableitungen.

$$f(x)=x\cdot e^{-0,16x}+36,5 \Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{-0,16x}+x\cdot e^{-0,16x}\cdot(-0,16)=(1-0,16x)\cdot e^{-0,16x}$$

Beachten Sie, dass die additive Konstante $36,5$ beim Ableiten wegfällt.

$$\begin{aligned} & f'(x)=(1-0,16x)\cdot e^{-0,16x} \\ \Rightarrow\ & f''(x)=(-0,16)\cdot e^{-0,16x}+(1-0,16x)\cdot e^{-0,16x}(-0,16) \\ & \qquad =(0,0256x-0,32)\cdot e^{-0,16x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f''(x)=(0,0256x-0,32)\cdot e^{-0,16x} \\ \Rightarrow\ & f'''(x)=0,0256\cdot e^{-0,16x}+(0,0256x-0,32)\cdot e^{-0,16x}\cdot(-0,16) \\ & \qquad =(0,0768-0,004096x)\cdot e^{-0,16x} \end{aligned}$$

Wegen $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-0,16x=0 \Leftrightarrow x=6,25$ gibt es nur eine kritische Stelle. Aus $f''(6,25)=-0,059<0$ ergibt sich $\text{HP}(6,25|38,8)$.

Die maximale Körpertemperatur betrug also 38,8 $^\circ\mathrm{C}$; sie wurde nach 6 Stunden und 15 Minuten erreicht.

Wegen $f''(x)=0 \Leftrightarrow 0{,}0256x-0{,}32=0 \Leftrightarrow x=12{,}5$ kann es nur einen Wendepunkt geben. Wegen $f'''(12{,}5)=0{,}003>0$ ist dies ein Rechts-Links-Wendepunkt. Die Temperatur nimmt also nach 12,5 Stunden am stärksten ab, und zwar um $f'(12{,}5)=-0{,}135$ $^\circ\mathrm{C}$ pro Stunde. Weil der Graph links von $x=12{,}5$ eine Rechtskurve ist, in deren Verlauf die Steigung immer mehr abnimmt, liegt die größte Steigung direkt am Anfang bei $x=0$ vor. Damit beträgt die größter Temperaturzunahme $f'(0)=1$ $^\circ\mathrm{C}$ pro Stunde.

Übungen zur Lerneinheit *Die natürliche Exponentialfunktion*

Übung 1. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen über dem angegebenen Intervall.

a) $f(x)=e^x$ für $-3\le x\le 3$ b) $f(x)=xe^x$ für $-4\le x\le 2$

c) $f(x)=x^2e^x$ für $-5\le x\le 1$ d) $f(x)=x^3e^x$ für $-7\le x\le 1$

e) $f(x)=e^{-x}$ für $-3\le x\le 3$ f) $f(x)=e^{x^2}$ für $-1\le x\le 1$

g) $f(x)=e^{-x^2}$ für $-2\le x\le 2$ h) $f(x)=xe^{-x^2}$ für $-2\le x\le 2$

Übung 2.

1. Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen.

   a) $f(x)=x^4e^x$ b) $f(x)=\left(2x^3+4x-1\right)e^x$

   d) $f(x)=\left(3x^5-6x^2+5\right)e^x$ c) $f(x)=\left(-2x^3+5x^2-8\right)e^x$

   e) $f(x)=4x^3+x^2e^x$ f) $f(x)=\left(2x^3e^x-4x\right)e^x$

2. Führen Sie die im Text vorgestellte Kurvenuntersuchung für $f(x)=\left(x^2-4x+4\right)\cdot e^x$ erneut durch und rechnen Sie dabei alle mitgeteilten Resultate nach.
3. Untersuchen Sie die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen auf Nullstellen sowie auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

   a) $f(x)=xe^x$ b) $f(x)=x^2e^x$

   c) $f(x)=(5x-3)e^x$ d) $f(x)=\left(2x^2-8\right)e^x$

   e) $f(x)=\left(2x^2+6x-20\right)e^x$ f) $f(x)=\left(-x^2+8x-15\right)e^x$

Übung 3.

1. Bilden Sie für die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen g und h die Verkettung $h\big(g(x)\big)$. Das heißt: Setzen Sie $g(x)$ in $h(x)$ für x ein.

   Beispiel. $h(x)=e^x$, $g(x)=x^2+1 \Rightarrow h\big(g(x)\big)=e^{x^2+1}$

   a) $h(x)=e^x$, $g(x)=x^4+3$ b) $h(x)=e^x$, $g(x)=2x-1$

   c) $h(x)=e^x$, $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ d) $h(x)=e^x$, $g(x)=-x^6+2x^2-x$

   e) $h(x)=e^x$, $g(x)=x^5-4x^3+x^2-1$ f) $h(x)=e^{x^2}$, $g(x)=4x-3$

   g) $h(x)=x^3-2x+1$, $g(x)=e^x$ h) $h(x)=e^{\sqrt{x}+x}$, $g(x)=6x^4+x^2$

2. Bilden Sie für die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen g und h die Verkettung $h\big(g(x)\big)$.

   Beispiel. $h(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1 \Rightarrow h\big(g(x)\big)=\sqrt{x^2+1}$

   a) $h(x)=x^5$, $g(x)=x^3-2$ b) $h(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x^2+1$

c) $h(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=6x^2+1$ d) $h(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=2x^3-5x+1$

e) $h(x)=\frac{1}{x^4}$, $g(x)=3x+6$ f) $h(x)=\sqrt[3]{x^5}$, $g(x)=2x^4+1$

g) $h(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, $g(x)=2x^2+3$ h) $h(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $g(x)=x^6+2$

i) $h(x)=x+\frac{1}{x^2}$, $g(x)=x^2+1$ j) $h(x)=x^3\cdot\sqrt{x}$, $g(x)=3x^2+x$

3. Finden Sie Funktionen h und g, sodass $f(x)$ entsteht, indem $g(x)$ in $h(x)$ eingesetzt wird.

a) $f(x)=e^{-x^3}$ b) $f(x)=e^{3x-4}$ c) $f(x)=e^{-x^4+8x-1}$

d) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ e) $f(x)=\ln(1+x^2)$ f) $f(x)=(x^3+2)^{10}$

g) $f(x)=\sqrt[3]{x^5-7x^2-1}$ h) $f(x)=\frac{1}{5x^4+2}$ i) $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^3}$

Übung 4.

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen.

a) $f(x)=e^{-x}$ b) $f(x)=e^{2x}$ c) $f(x)=e^{x+1}$

d) $f(x)=e^{x^2}$ e) $f(x)=e^{x^2+2x+1}$ f) $f(x)=e^{-3x^4+5x^3+1}$

g) $f(x)=xe^{2x}$ h) $f(x)=xe^{-x^2}$ i) $f(x)=(5x-1)e^{x^2}$

j) $f(x)=(x^2+2)e^{x^2}$ k) $f(x)=(x^3+1)e^{x^2+1}$ l) $f(x)=(-x^3+x-1)e^{x^5+2x^2}$

2. Führen Sie für die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen jeweils eine Kurvenuntersuchung durch (Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte). Stellen Sie zur Kontrolle die Funktionsgraphen mithilfe des GTR dar.

a) $f(x)=xe^{x^2}$ b) $f(x)=xe^{x^3}$ c) $f(x)=xe^{-x}$

d) $f(x)=xe^{-x^2}$ e) $f(x)=xe^{-x^3}$ f) $f(x)=x^2e^{-x}$

g) $f(x)=x^3e^{-x}$ h) $f(x)=x^2e^{x^3}$ i) $f(x)=x^2e^{-x^2}$

j) $f(x)=x^2e^{-x^3}$ k) $f(x)=x^3e^{x^2}$ l) $f(x)=x^3e^{-x^2}$