Anwendungen der Differentialrechnung

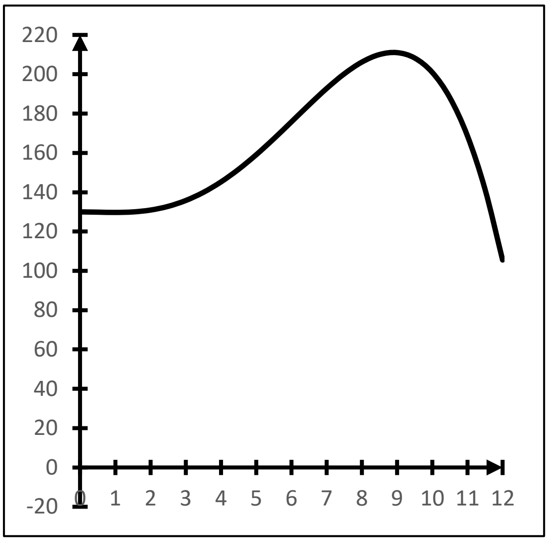
1. Ziele der Lerneinheit

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie exemplarisch

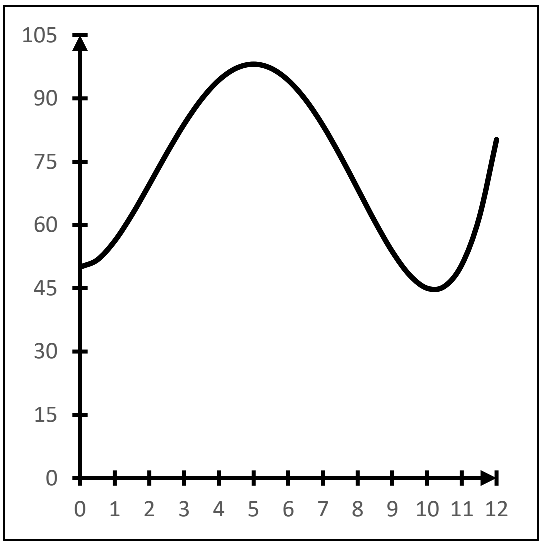
- wie die Differentialrechnung in Sachproblemen angewendet wird;
- welche Bedeutung die Steigung einer Kurve in Anwendungssituationen hat.

2. Zwei Beispiele

Sylvia ist Diabetikerin. Vor einer Mahlzeit spritzt sie Insulin. Der Verlauf ihres Blutzuckerspiegels in den darauf folgenden 120 Minuten ist rechts dargestellt. Die Zeit ist dabei auf der x-Achse in Einheiten zu 10 Minuten angegeben und der Blutzuckerspielgel auf der y-Achse in Milligramm pro Deziliter Blut (mg/dl).



Carola steht kurz vor dem Abitur. Sie bereitet sich gerade intensiv auf ihre erste LK-Klausur vor. Dabei hat sie festgestellt, dass ihre Konzentrationsfähigkeit im Lauf des Tages nicht konstant ist sondern schwankt. Im Lauf des Vormittags kann sich Carola ziemlich gut konzentrieren, wohingegen sie am Nachmittag in ein „Loch“ fällt. Stellt man den zeitlichen Verlauf ihrer Konzentrationsfähigkeit von morgens um 7 Uhr bis abends um 19 Uhr grafisch dar, erhält man die links abgebildete Konzentrationskurve. In der Grafik ist auf der x-Achse die Zeit in Stunden abgetragen. Auf der y-Achse ist angegeben, wieviel Prozent der maximal möglichen Konzentrationsleistung jeweils erreicht sind, wobei 0 % keiner und 100 % der maximal möglichen Konzentrationsleistung entspricht.

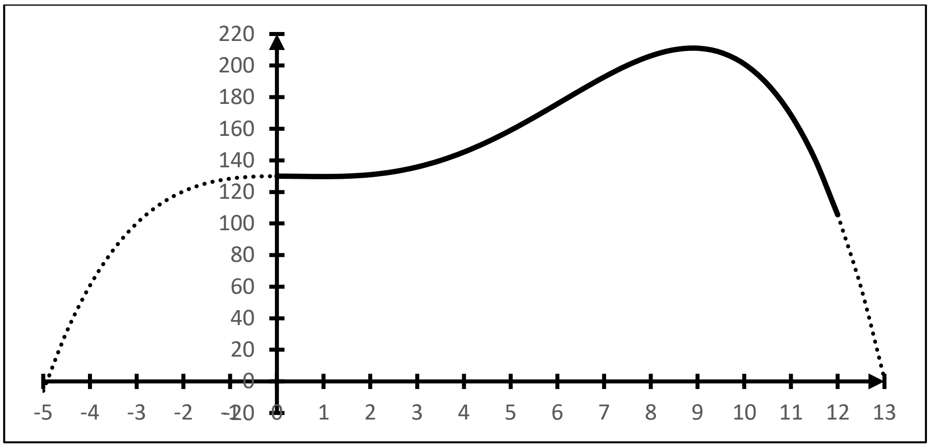


Folgende Fragen wollen wir untersuchen:

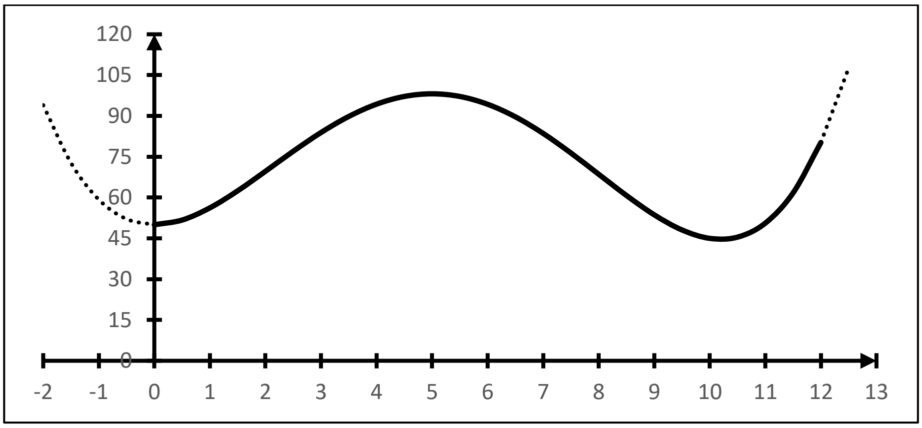
- Wie groß sind jeweils der größte und der kleinste Wert im betrachteten Zeitintervall?
- Wann lagen diese Werte vor?
- Zu welchem Zeitpunkt nahmen die Werte am stärksten zu und am stärksten ab?
- Und wie stark nahmen sie dann zu bzw. ab?

Um die durch die Kurven dargestellten Wertverläufe mathematisch zu analysieren, ist es sinnvoll, die Kurven als Teil eines Funktionsgraphen zu interpretieren. Die durch die folgenden Gleichungen definierten Funktionen stimmen im jeweils betrachteten Zeitintervall mit den Werterlaufskurven überein:

- bei Sylvia: $f(x) = -0{,}05x^4 + 0{,}66x^3 - 0{,}89x^2 + 130$ für $0 \leq x \leq 12$



- bei Carola: $f(x) = 0{,}075x^4 - 1{,}52x^3 + 7{,}65x^2 + 50$ für $0 \leq x \leq 12$



Die oben formulierten Fragen können nun mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung angegangen werden.

3. Das Berechnen größter und kleinster Werte

Um den größten und kleinsten Wert zu berechnen, werden im ersten Schritt die Hoch- und Tiefpunkte berechnet.

Für Sylvias Blutzuckerkurve ergeben sich die Ableitungen

$$f'(x) = -0{,}2x^3 + 1{,}98x^2 - 1{,}78x \text{ und } f''(x) = -0{,}6x^2 + 3{,}96x - 1{,}78\,.$$

Die kritischen Stellen werden berechnet

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(-0{,}2x^2 + 1{,}98x - 1{,}78\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = 1 \vee x = 8{,}9\right)$$

Ein hinreichendes Kriterium wird angewendet, um Vorliegen und Art eines Extrempunktes festzustellen. Außerdem werden die y-Koordinaten berechnet:

- $f''(0) = -1{,}78 < 0 \Rightarrow \text{HP}(0|130)$
- $f''(1) = 1{,}58 > 0 \Rightarrow \text{TP}(1|129{,}72)$
- $f''(8{,}9) = -14{,}062 < 0 \Rightarrow \text{HP}(8{,}9|211{,}071435)$

Die berechneten Werte werden im Sachkontext interpretiert. Da y-Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte nur *lokal* einen größten und kleinsten Wert angeben, ist es erforderlich, die berechneten y-Koordinaten noch mit den Werten, die die Funktion an den Rändern des betrachteten Intervalls hat, zu vergleichen.

- Für den größten Blutzuckerwert kommen die y-Koordinaten der Hochpunkte und die Funktionswerte bei $x = 0$ und $x = 12$ infrage, also 130 mg/dl (Wert beim Hochpunkt an der Stelle $x = 0$, zugleich der Funktionswert an der linken Grenze $x = 0$ des betrachteten Intervalls), $\approx 211{,}07$ mg/dl (Wert beim Hochpunkt an der Stelle $x = 8{,}9$) sowie $f(12) = 105{,}52$ mg/dl (Funktionswert an der rechten Grenze $x = 12$ des betrachteten Intervalls). Der größte Wert hiervon ist 211,07 mg/dl, sodass der größte Blutzuckerwert rund 211 mg/dl beträgt. Dieser Wert liegt $8{,}9 \cdot 10 = 89$ Minuten nach Injektion des Insulins vor.
- Für den kleinsten Blutzuckerwert kommen die y-Koordinate des Tiefpunktes und die Funktionswerte bei $x = 0$ und $x = 12$ infrage, also 130 mg/dl (Funktionswert an der linken Grenze $x = 0$ des betrachteten Intervalls), $129{,}72$ mg/dl (Wert beim Tiefpunkt an der Stelle $x = 1$) sowie $105{,}52$ mg/dl (Funktionswert an der rechten Grenze des betrachteten Intervalls). Der kleinste Wert hiervon ist $105{,}52$ mg/dl, sodass der kleinste Blutzuckerwert rund 106 mg/dl beträgt. Dieser Wert liegt $12 \cdot 10 = 120$ Minuten nach Injektion des Insulins vor.

→ *Übung 1*

4. Untersuchen auf stärkste Zu- und Abnahme der Werte

Die Stellen, an denen sich die Werte einer Funktion – zumindest lokal – am stärksten ändern, sind die Wendestellen. Diese werden zuerst berechnet:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}6x^2 + 3{,}96x - 1{,}78 = 0 \Leftrightarrow (x = 0{,}485 \vee x = 6{,}112).$$

Ein hinreichendes Kriterium wird angewendet, um Vorliegen und Art eines Wendepunktes festzustellen.

- $f'''(0{,}485) = 3{,}378 > 0 \Rightarrow$ RL-Wendepunkt bei $x = 0{,}485$
- $f'''(6{,}112) = -3{,}3744 < 0 \Rightarrow$ LR-Wendepunkt bei $x = 6{,}112$

Um zu berechnen, an welchen Stellen die Werte am stärksten zu- bzw. abnehmen, berechnen wir die Steigung des Graphen an den Wendestellen und zusätzlich die Steigung des Graphen an den Rändern des betrachteten Intervalls:

- Steigung am RL-Wendepunkt bei $x = 0{,}485$: $f'(0{,}485) = -0{,}434$
- Steigung am LR-Wendepunkte bei $x = 6{,}112$: $f'(6{,}112) = 15{,}181$
- Steigung an der linken Grenze $x = 0$: $f'(0) = 0$

- Steigung an der rechten Grenze $x=12$: $f'(12)=-90{,}48$

Da die größte positive Steigung am LR-Wendepunkt bei $x=6{,}112$ mit 15,181 vorliegt, nimmt der Blutzuckerwert nach $6{,}112\cdot 10=61{,}12\approx 61$ Minuten am stärksten zu. Da die größte negative Steigung an der rechten Grenze bei $x=12$ mit $-90{,}48$ vorliegt, nimmt der Blutzuckerwert bei $12\cdot 10=120$ Minuten am stärksten ab.

→ *Übung 2*

5. Was die Werte der Ableitung bedeuten

Was bedeutet der Wert 15,181 der Ableitung an der Stelle $x=6{,}112$? Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente an der Stelle $x=6{,}112$ an. Die Steigung einer Geraden ergibt sich immer als Differenz der y-Werte zweier Punkte der Geraden dividiert durch die Differenz der jeweils zugehörigen x-Werte

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

sodass die Steigung die Einheit

y-Einheiten je x-Einheit

hat, im vorliegenden Fall also

mg/dl je 10 Minuten.

Der Wert 15,181 der Ableitung an der Stelle $x=6{,}112$ bedeutet also, dass der Blutzuckerspiegel um 15,181 mg/dl je 10 Minuten zunimmt, also je Stunde (60 Minuten) um $6\cdot 15{,}181=91{,}086$ mg/dl oder je Minute um $15{,}181:10=1{,}5181$ mg/dl.

Der Wert der $-90{,}48$ der Ableitung an der rechten Intervallgrenze bedeutet dementsprechend, dass der Blutzuckerspiegel um 90,48 mg/dl je 10 Minuten abnimmt, also um 9,048 mg/dl je Minute.

→ *Übung 3*

Zusammenfassend kann man also sagen: Sylvias Blutzuckerspiegel nimmt nach 61 Minuten am stärksten zu und zwar um 1,5181 mg/dl je Minuten. Ihr Blutzuckerspiegel nimmt am Ende des betrachteten Zeitraums von 120 Minuten am stärksten ab und zwar um 9,048 mg/dl je Minute.

→ *Übung 4*

Übungen zur Lerneinheit *Anwendungen der Differentialrechnung*

Übung 1. Berechnen Sie, wann sich Carola in der Zeit von morgens um 7 Uhr bis abends um 19 Uhr am besten und wann sie sich am schlechtesten konzentrieren konnte. Geben Sie die jeweilige Konzentrationsfähigkeit in Prozent der maximalen Konzentrationsfähigkeit an.

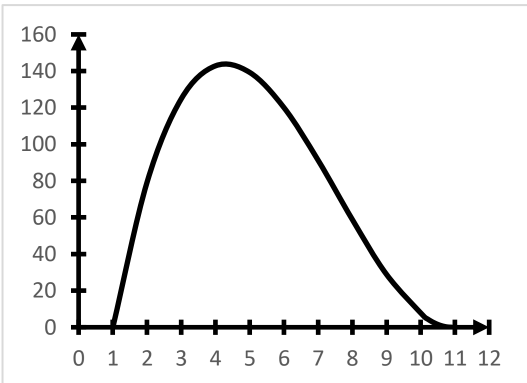
Übung 2. Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt in der Zeit von morgens um 7 Uhr bis abends um 19 Uhr Carolas Konzentrationsfähigkeit am stärksten zu- und am stärksten abnahm.

Übung 3. Berechnen Sie, um welchen Wert Carolas Konzentrationsfähigkeit am stärksten zu- und am stärksten abnahm.

Übung 4.

1. Die Großküche, die die städtischen Schulen und Kindergärten einer Stadt mit Mittagessen beliefert, kalkuliert Ihren Gewinn mit der durch die Gleichung
$$f(x) = -0{,}2x^3 + 0{,}8x^2 + 2{,}7x - 1{,}8$$
gegebenen Gewinnfunktion, wobei $0 \leq x \leq 6$. Dabei entspricht eine x-Einheit 40 Beschäftigten und eine y-Einheit 200 € Gewinn in der Woche.
   a) Berechnen Sie die Höhe des Monatsgewinns der Großküche, die im Moment 44 Beschäftigte hat.
   b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f über dem angegebenen Intervall.
   c) Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f. Bestimmen Sie dann die Gewinnzone der Großküche: Das sind die Beschäftigtenzahlen, bei denen die Großküche keinen Verlust macht.
   d) Berechnen Sie den maximalen Gewinn und die Anzahl der Mitarbeiter, die diesen erwirtschaften.
   e) Berechnen Sie, bei welcher Mitarbeiterzahl der Gewinn am stärksten zu- bzw. abnimmt. Berechnen Sie auch, wie hoch die maximale Zu- und Abnahme sind.

2. In einer Klinik wird ein neues Mittel zur Behandlung von ADHS klinisch erprobt. Pharmakokinetische[1] Untersuchungen haben ergeben, dass die Menge an Wirkstoff, die sich in der Zeit nach der Einnahme einer Tablette im Blut befindet, durch die rechts abgebildete Kurve beschrieben wird, wobei x in Stunden und y in mg angegeben ist. Die Kurve ist Teil der Graphen der Funktion f mit
$f(x) = x^3 - 22{,}8x^2 + 140{,}61x - 118{,}81$.

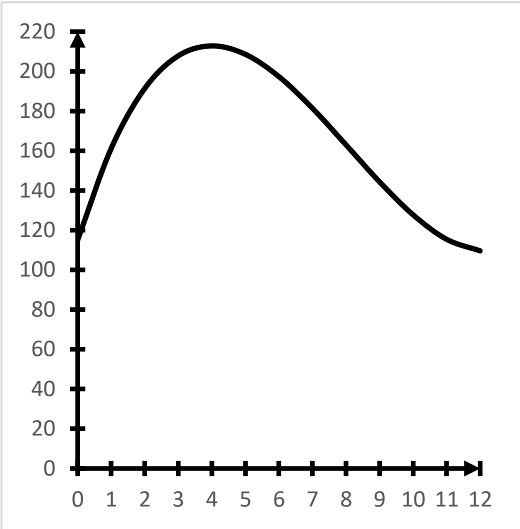


   a) Berechnen Sie, wie viel Wirkstoff sich 210 Minuten nach der Einnahme im Blut befindet und wie stark die Wirkstoffmenge im Blut dann ansteigt.
   b) Berechnen Sie die Nullstellen von f und interpretieren sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.

[1] Pharmakokinetik = Lehre von den Konzentrationsveränderungen der Arzneistoffe im Organismus in Abhängigkeit von der Zeit

c) Berechnen Sie, welche Wirkstoffmenge maximal im Blut ist und zu welchem Zeitpunkt nach der Einnahme dies der Fall ist.
d) Untersuchen Sie, wann die Wirkstoffmenge im Blut am schnellsten ansteigt und abfällt. Geben Sie die entsprechende Zu- und Abnahmegeschwindigkeit an.

3. Um zu überprüfen, ob ein Mensch an Diabetes erkrankt ist, wird oft ein *Glukose-Toleranztest* durchgeführt. Hierbei nimmt der Patient morgens nüchtern ein glukosehaltiges Präparat ein. Unmittelbar vor und in regelmäßigen Abständen nach der Einnahme wird der Blutzuckerspiegel gemessen. Diabetes liegt vor, wenn der nüchtern gemessene Blutzuckerspiegel über 110 mg/dl und der zwei Stunden nach der Einnahme des Präparates gemessene Wert über 200 mg/dl liegt. Bei Frauke wird ein derartiger Test durchgeführt. Die in Abhängigkeit von der Zeit in den ersten drei Stunden nach der Einnahme des Präparats gemessenen Blutzuckerwerte bilden die rechts dargestellte Blutzuckerkurve, wobei x in Einheiten zu 15 Minuten und y in mg/dl angegeben ist. Die Kurve ist Teil der Graphen der Funktion f mit $f(x)=0{,}375x^3-9{,}1125x^2+54{,}9x+115$.



a) Berechnen Sie Fraukes Blutzuckerspiegel 45 Minuten nach Einnahme des Präparats. Berechnen Sie auch, um wie viel mg/dl je Minute der Blutzuckerspiegel dann zunahm.
b) Untersuchen Sie, nach wie vielen Minuten Fraukes Blutzuckerspiegel wieder auf den Wert abgesunken ist, den sie unmittelbar vor Einnahme des Präparates hatte.
c) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrempunkte und interpretieren Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.
d) Untersuchen Sie, wann der Blutzuckerspiegel am schnellsten anstieg und abfiel. Geben Sie die entsprechende Zu- und Abnahmegeschwindigkeit an.
e) Begründen Sie, ob bei Frauke aufgrund dieses Tests auf Diabetes geschlossen werden kann.

4. Die Verwaltung eines Jugendheims, das für eine Belegung mit maximal 80 Personen ausgelegt ist, legt bei ihren Planungen eine Gewinnfunktion zugrunde, die die Gleichung $f(x)=-0{,}5x^3-1{,}5x^2+72x-70$ hat. Dabei entspricht eine x-Einheit acht Bewohnern und eine y-Einheit einem Gewinn von 10 € pro Monat.
a) Berechnen Sie den bei 32 Bewohnern erzielten Gewinn und um welchen Wert der Gewinn dann zunimmt.
b) Skizzieren Sie den Graphen für $0\le x\le 11$.
c) Bestimmen Sie, bei welcher Bewohnerzahl der größte Gewinn erzielt wird, und berechnen Sie diesen.
d) Berechnen Sie, bei welcher Bewohnerzahl der Gewinn am stärksten zu- und am stärksten abnimmt. Berechnen Sie auch, um wieviel Euro pro Bewohner der Gewinn maximal zu- bzw. abnimmt.
e) Berechnen Sie alle Nullstellen von f und geben Sie die Gewinnzone des Heims an.

5. In der Werkstatt eines Jugendgefängnisses wird Holzspielzeug produziert, das über einen Wohltätigkeitsladen verkauft wird. Der erzielte Gewinn wird zur Finanzierung von Weiterbildungsangeboten für die Insassen der Strafanstalt verwendet. Der Gewinn in Euro kann näherungsweise mit der durch $f(x) = -x^4 + 148x^2 - 576$ gegebenen Funktion berechnet werden, wobei eine x-Einheit 30 produzierten Spielzeugen entspricht.
   a) Berechnen Sie den bei 75 produzierten Spielzeugen erzielten Gewinn und um welchen Wert der Gewinn dann zunimmt.
   b) Skizzieren Sie den Graphen für $0 \le x \le 12$.
   c) Bestimmen Sie, bei welcher Produktionsmenge der größte Gewinn erzielt wird, und berechnen Sie diesen.
   d) Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge der Gewinn am stärksten zu- und am stärksten abnimmt, wenn man von einer maximalen Produktionsmenge von 360 Spielzeugen ausgeht. Berechnen Sie auch, wieviel Euro pro produziertem Spielzeug die maximale Gewinnzu- bzw. –abnahme beträgt.
   e) Berechnen Sie alle Nullstellen von f und geben Sie an, bei welchen Produktionsmengen Gewinn erwirtschaftet wird.

6. Der Gewinn, den der ambulante Pflegedienst *Care@Home* erzielt, hängt ab von der Größe des Gebietes, das er bedient. Er kann näherungsweise mithilfe der durch $f(x) = -0{,}00128x^5 + 1{,}18x^2 - 3$ gegebenen Funktion berechnet werden. Dabei entspricht eine x-Einheit einem Gebietsradius von 2 km und eine y-Einheit entspricht einem Gewinn von 100 € je Woche.
   a) Berechnen Sie den bei einem Gebietsradius von 8,5 km erzielten Gewinn und die Höhe der wöchentlichen Gewinnzunahme pro Kilometer.
   b) Zeichnen Sie den Graphen für $-5 \le x \le 10$.
   c) Bestimmen Sie, bei welchem Gebietsradius der größte Gewinn erzielt wird, und berechnen Sie diesen.
   d) Berechnen Sie, bei welchem Gebietsradius der Gewinn am stärksten zu- und am stärksten abnimmt, wenn man einen maximalen Gebietsradius von 20 km zugrunde legt. Berechnen Sie auch, wieviel Euro pro Kilometer die maximale Gewinnzu- bzw. -abnahme beträgt.

7. Die Verwaltung der Großküche, die die städtischen Kindergärten und Schulen mit Mittagessen versorgt, hat für die Gewinnfunktion die Gleichung $f(x) = -0{,}5x^5 + 4x^3 - 2$ ermittelt. Dabei entspricht eine x-Einheit 40 Beschäftigten und eine y-Einheit 200 € Gewinn in der Woche.
   a) Berechnen Sie den bei 60 Beschäftigten erzielten Gewinn und die Höhe der wöchentlichen Gewinnzunahme pro Beschäftigtem.
   b) Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion für $-3 \le x \le 3$.
   c) Bestimmen Sie die im Sinne der Gewinnmaximierung optimale Mitarbeiterzahl und berechnen Sie, wieviel Gewinn maximal pro Woche erzielt werden kann.
   d) Berechnen Sie, bei welcher Beschäftigtenzahl der Gewinn am stärksten zunimmt. Berechnen Sie auch, wieviel Euro pro Beschäftigtem die maximale wöchentliche Gewinnzunahme beträgt.

8. Der Gewinn, den ein Krankenhaus bei einem Patienten durchschnittlich macht, hängt wesentlich von seiner Verweildauer im Krankenhaus ab. Die Verwaltung der Uni-Klinik in Bonn setzt hierfür versuchsweise die durch $f(x) = -1{,}5x^5 + 15x + 3$ gegebene Funktion

an. Dabei entspricht eine x-Einheit eine Verweildauer von 5 Tagen und eine y-Einheit einem Gewinn von 90 € für die gesamte Verweildauer.

a) Berechnen Sie den bei einem Patienten, der nur ambulant behandelt wird.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion für $-2 \le x \le 2$.
c) Bestimmen Sie, bei welcher Verweildauer der pro Patient gemachte Gewinn am größten ist, und wie groß er ist.
d) Ermitteln Sie, bei welcher Verweildauer der pro Patient gemachte Gewinn am stärksten zunimmt, und wie groß diese Zunahme pro Tag ist.

9. Eine Jugendgruppe führt eine Bergwanderung durch. Das Gebirge entspricht dem im ersten und zweiten Quadranten liegenden Teil des Graphen der durch die Gleichung $f(x) = -0{,}0015x^4 + 0{,}028x^3 - 0{,}159x^2 + 0{,}24x + 1{,}364$ gegebenen Funktion. Dabei entspricht eine x-Einheit einer Distanz von einem Kilometer und eine y-Einheit entspricht einer Höhendifferenz von einem Kilometer. $y = 0$ entspricht der Höhe Normalnull (NN). Die Gruppe wandert vom linken Gipfel zum rechten Gipfel.
   a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für x-Werte zwischen -3 und 12. Markieren Sie den Teil des Graphen, der das Gebirge bildet.
   b) Berechnen Sie, in welcher Höhe über NN die Jugendlichen ihre Wanderung beginnen und beenden und berechnen Sie, welches ist die geringste Höhe ist, die sie auf ihrer Wanderung erreichen.
   c) Ermitteln Sie, an welchen Punkten die Gruppe mit dem größten Gefälle und der größten Steigung konfrontiert wird. Berechnen Sie, wie stark das Gefälle bzw. die Steigung jeweils ist und wie hoch die Jugendlichen dann jeweils sind.

10. In einem Chemieunternehmen in Leverkusen hat es einen Unfall gegeben, bei dem umweltschädliche Gase und Dämpfe entwichen sind. Die Fläche des Gebietes, in dem die Umweltbelastung festgestellt werden kann, hängt ab von der Zeit, die nach dem Unfall vergangen ist. Die Größe der Fläche kann mit Hilfe der durch $f(x) = -0{,}25x^5 + 6x^3 + 2$ gegebenen Funktion berechnet werden. Dabei entspricht jede x-Einheit einem Zeitraum von 90 Minuten und jede y-Einheit einer Flächengröße von 0,5 km^2.
    a) Zeichnen Sie den Graphen für $-5 \le x \le 5$. Ermitteln Sie anhand der Zeichnung, ab welchem Zeitpunkt keine Umweltbelastung mehr feststellbar ist.
    b) Berechnen Sie, wann ist das betroffene Gebiet am größten ist und welche Fläche es dann einnimmt.
    c) Bestimmen Sie, wie viele Minuten nach dem Unfall die Fläche des betroffenen Gebietes am stärksten zunimmt, und berechnen Sie, wieviel km² pro Minute diese maximale Zunahme ist.

11. Eine Autofahrerin macht eine neunzigminütige Fahrt. Die nach x Stunden zurückgelegte Strecke in Kilometern kann mithilfe der durch $f(x) = -475x^6 + 1995x^5 - 2850x^4 + 1425x^3$ gegebenen Funktion berechnet werden.
    a) Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 \le x \le 1{,}5$.
    b) Berechnen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von f.
    c) Bestimmen Sie, wann die Fahrerin am schnellsten unterwegs war, und berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit.