Kurven mithilfe der Differentialrechnung untersuchen

1. Ziele der Lerneinheit

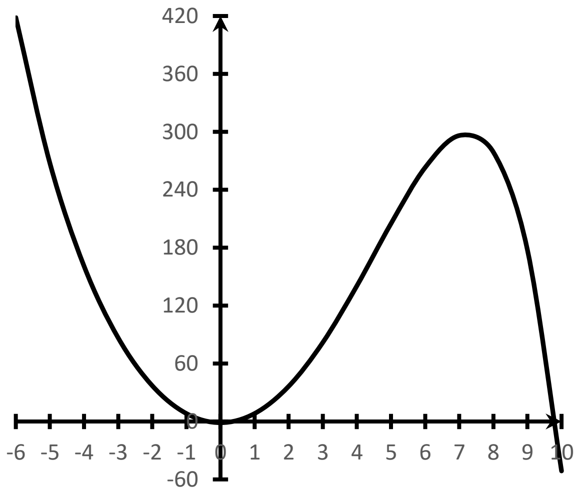
In dieser Lerneinheit lernen Sie,

- welche Bedeutung die Ableitung in Anwendungssituationen haben kann;
- was man unter Hoch- und Tiefpunkten versteht;
- wie Hoch- und Tiefpunkte allein mithilfe der ersten Ableitung berechnet werden können;
- was die Krümmung eines Funktionsgraphen ist;
- wie die zweite Ableitung mit der Krümmung zusammenhängt;
- wie die zweite Ableitung bei der Berechnung von Hoch- und Tiefpunkten eingesetzt werden kann;
- was man unter Wendepunkten versteht;
- wie Wendepunkte mithilfe der zweiten und dritten Ableitung berechnet werden können.

2. Graph und Ableitung einer Gewinnfunktion

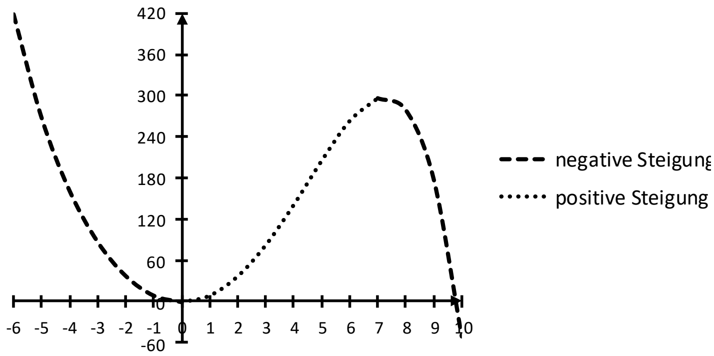
Im Rahmen eines Entwicklungshilfeprojekts wird in der Nähe eines kleinen afrikanischen Dorfes Brachland zu landwirtschaftlicher Nutzfläche kultiviert und landwirtschaftlich genutzt. Durch den Verkauf überschüssiger landwirtschaftlicher Erträge an Dörfer in der Nachbarschaft erwirtschaftet die Dorfgemeinschaft einen kleinen Gewinn. Der Graph der Gewinnfunktion ist rechts dargestellt. Sie hat (näherungsweise) die Gleichung

$$f(x) = -0{,}01x^5 + 9{,}5x^2 - 1{,}25,$$



wobei eine x-Einheit einer Fläche von 1 ha (10.000 m²) und eine y-Einheit einem Jahresgewinn von 2 US-$ entspricht.

Anders als der Graph einer linearen Funktion oder auch der Graph einer Zeit-Weg-Funktion hat der Graph dieser Gewinnfunktion Abschnitte mit positiver Steigung und Abschnitte mit negativer Steigung, wo also $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist.



Von den linearen Funktionen ist bekannt, dass die Funktionswerte größer werden, wenn die Steigung positiv ist, und kleiner werden, wenn die Steigung negativ ist. Hierbei wird die x-Achse von links nach rechts durchlaufen. Das Gleiche gilt auch, wenn der Graph eine Kurve ist:

- Die Funktionswerte wachsen, falls $f'(x) > 0$ ist.
- Dir Funktionswerte fallen, falls $f'(x) < 0$ ist.

Welche *Bedeutung* hat die Ableitung im vorliegenden Sachproblem? Wir wissen, dass f' die Steigung wiedergibt. Bei einer linearen Funktion f besagt die Gleichung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \,,$$

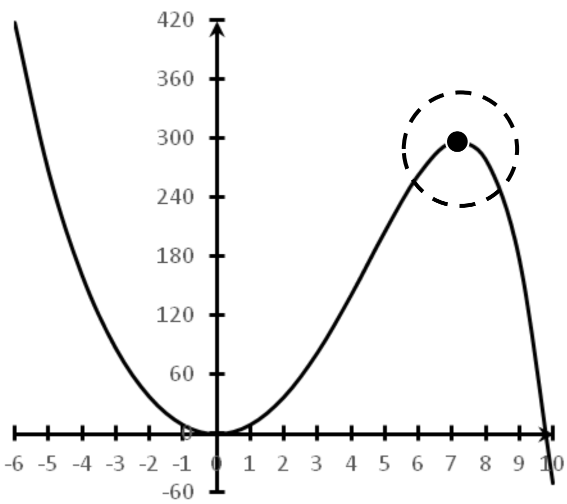
dass durch die Steigung die Veränderung der Funktionswerte y bezogen auf die Veränderung der x-Werte, also je x-Einheit, angibt. Genauso ist es auch in dem Fall, wenn es sich Funktion f nicht um eine lineare Funktion handelt:

> Die Steigung $f'(x)$ gibt an, um wieviel y-Einheiten je x-Einheit sich die Werte der Funktion an der Stelle x verändern.

Im Fall der durch $f(x) = -0{,}01x^5 + 9{,}5x^2 - 1{,}25$ gegebenen Gewinnfunktion ist $f'(x) = -0{,}05x^4 + 19x$. Der Wert $f'(3) = 52{,}95$ gibt an, dass bei einer Flächengröße von 3 ha der Gewinn um $52{,}95$ „y-Einheiten je x-Einheit“ zunimmt. Da eine y-Einheit 2 US-$ und eine x-Einheit 1 ha sind, bedeutet dies, dass bei einer Flächengröße von 3 ha der Gewinn um $52{,}95$ Geldeinheiten zu 2 US-$ je Hektar zunimmt, also um $52{,}95 = 105{,}90$ $ je Hektar. → *Übung 1*

3. Hoch- und Tiefpunkte und der Vorzeichenwechseltest

Für das Entwicklungshilfeprojekt in Afrika kann der größte Gewinn am **Gewinnmaximum** abgelesen werden: Es liegt ungefähr im Punkt $P \approx (7|300)$. Das bedeutet: Der größte Gewinn wird bei etwa 7 ha Flächengröße erzielt und beträgt etwa $300 \cdot 2 = 600$ US-$.



Anders als bei quadratischen Gewinnfunktionen (Graph = Parabel) ist das Gewinnmaximum hier aber *nicht* der höchste Punkt des Graphen. Zum Beispiel ist der Graph bei $x = -6$ höher als im Gewinnmaximum.

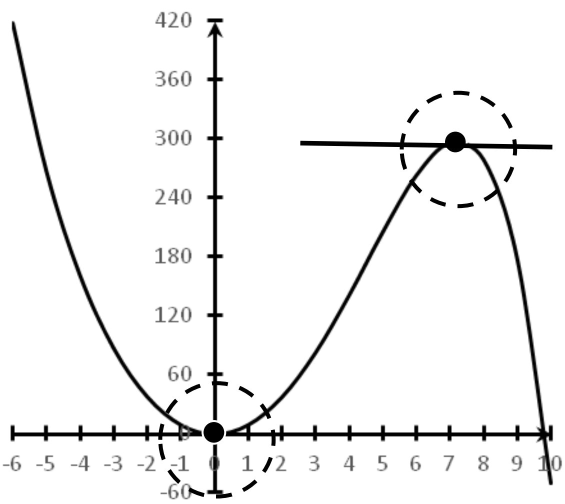
Das Gewinnmaximum ist also nur *lokal* der höchste Punkt: *In der Nähe* des Gewinnmaximum (oben durch den gestrichelten Kreis angedeutet) hat der Graph keinen höheren Punkt. Solche Punkte eines Graphen heißten Hochpunkte:

Definition. $P=\left(x_0 \mid f\left(x_0\right)\right)$ ist ein

- **Hochpunkt** von f, wenn man einen Kreis mit Mittelpunkt P zeichnen kann, in dem P der höchste Punkt des Graphen von f ist. In diesem Fall ist $f\left(x_0\right)$ zumindest *in der Nähe von* x_0 der größte Funktionswert von f. Man sagt auch: Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Maximum.**
- **Tiefpunkt** von f, wenn man einen Kreis mit Mittelpunkt P zeichnen kann, in dem P der tiefste Punkt des Graphen von f ist. In diesem Fall ist $f\left(x_0\right)$ zumindest *in der Nähe von* x_0 der kleinste Funktionswert von f: Die Funktion f hat an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum.**

Mit dem Begriff **lokales Extremum** fasst man die Begriffe lokales Maximum und lokales Minimum zusammen. Liegt an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, nennt man x_0 auch **Extremstelle**.

Um zum Beispiel das Gewinnmaximum einer Gewinnfunktion zu bestimmen, muss der Hochpunkt des Graphen bestimmt werden. In anderen Situationen müssen gelegentlich auch Tiefpunkte bestimmt werden. Hierzu schauen wir uns nochmals den Graphen der Gewinnfunktion an, der rechts nochmal abgebildet ist. Es fällt auf: *Die Tangenten im Hoch- und im Tiefpunkt sind waagerecht, haben also die Steigung* 0. Dies muss bei jedem Hoch- und bei jedem Tiefpunkt so sein:



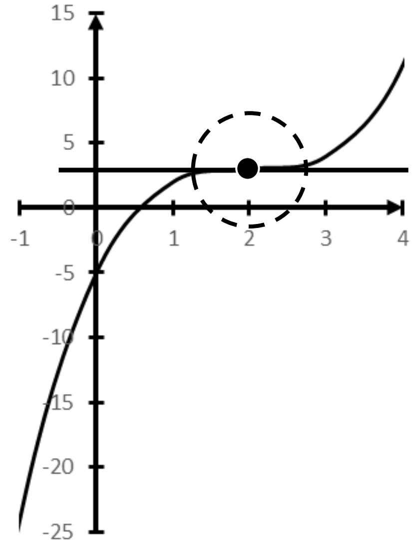
Notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Extrempunkts.
An der Stelle x kann *nur dann* ein Hoch- oder ein Tiefpunkt liegen, wenn $f'(x)=0$ ist.

Man spricht hier von einem notwendigen Kriterium, weil die Bedingung $f'(x)=0$ zwingend erfüllt sein muss, damit an der Stelle x ein Hoch- oder ein Tiefpunkt liegen *kann*.

Eine Stelle x, für die $f'(x)=0$ ist, nennen wir auch **kritische Stelle** von f. Damit kann das notwendige Kriterium so umformuliert werden:

Notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Extrempunktes. An der Stelle x kann *nur dann* ein Hoch- oder ein Tiefpunkt liegen, wenn x eine kritische Stelle von f ist.

Achtung: x kann eine kritische Stelle sein, ohne dass dort ein Hoch- oder ein Tiefpunkt ist, siehe Graph rechts.



Das notwendige Kriterium wird beim Bestimmen der Hoch- und Tiefpunkte benutzt, um in einem ersten Schritt alle Stellen herauszubekommen, an denen ein Hoch- oder Tiefpunkt *liegen kann* (dies sind die kritischen Stellen) und damit alle Stellen auszuschließen, an denen ganz sicher kein Hoch- oder Tiefpunkt sein kann.

Beispiel. Bei der Gewinnfunktion des kleinen afrikanischen Dorfes, $f(x) = -0{,}01x^5 + 9{,}5x^2 - 1{,}25$, sollen alle Hoch- und Tiefpunkte bestimmt werden. Nachdem die Ableitung $f'(x) = -0{,}05x^4 + 19x$ bestimmt ist, werden die kritischen Stellen berechnet. Hierzu wird die erste Ableitung gleich null gesetzt:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}05x^4 + 19x = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(-0{,}05x^3 + 19\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ bzw. } \underline{\underline{x = 7{,}243}}$$

Die kritischen Stellen sind $x = 0$ sowie $x = 7{,}243$. *Nur hier* können Hoch- bzw. Tiefpunkte liegen. → *Übung 2*

Um – ohne auf eine Zeichnung Bezug zu nehmen – festzustellen, ob es sich wirklich um Extremstellen handelt und ob dann ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt, müssen wir noch etwas arbeiten.

Damit in einem Punkt P ein Hochpunkt vorliegen kann, müssen die Funktionswerte links des Punktes wachsen und rechts des Punktes fallen.

Und umgekehrt: Damit in einem Punkt P ein Tiefpunkt vorliegen kann, müssen die Funktionswerte links des Punktes fallen und rechts des Punktes steigen.

Natürlich muss dies jeweils nur gelten, wenn man sich auf die Nähe des Punktes beschränkt. Wachsen und Fallen der Funktionswerte hatten wir oben bereits mithilfe der Ableitung charakterisiert: Die Funktionswerte wachsen, wenn $f'(x) > 0$ ist, sie fallen, wenn $f'(x) < 0$ ist. Wir können also sagen:

Vorzeichenwechselkriterium (Zwischenversion). Ist x_0 eine kritische Stelle und ist f' *in der Nähe* des Punktes $P = \left(x_0 \mid f(x_0)\right)$

- links positiv und rechts negativ, so ist P ein Hochpunkt von f;
- links negativ und rechts positiv, so ist P ein Tiefpunkt von f.

Im ersten Fall sagt man: „f' macht bei x einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$." Im zweiten Fall sagt man: „f' macht bei x einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$."

Damit können wir jetzt ein vollständiges Kriterium für die Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten formulieren:

Hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Hoch- oder Tiefpunktes – Vorzeichenwechselkriterium/Vorzeichenwechseltest.
Angenommen, x ist eine kritische Stelle von f. Dann liegt bei x

- ein *Hochpunkt*, falls f' an der Stelle x einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ macht.
- ein *Tiefpunkt*, falls f' an der Stelle x einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ macht.
- *weder* ein Hoch- *noch* ein Tiefpunkt, falls f' an der Stelle x *keinen* Vorzeichenwechsel macht, also links positiv und auch rechts positiv oder links negativ und auch rechts negativ ist.

Um den Vorzeichenwechseltest durchzuführen ist es erforderlich, das Vorzeichen der Ableitung an **Kontrollstellen** „unmittelbar links“ und an Kontrollstellen „unmittelbar rechts“ der kritischen Stelle zu berechnen. Aber: Wie viele Kontrollstellen muss man jeweils wählen und wie weit dürfen die Kontrollstellen von der kritischen Stelle entfernt sein?

Die Antwort gibt der **Zwischenwertsatz für Ableitungen**: *Zwischen zwei direkt aufeinander folgenden kritischen Stellen ändert f' sein Vorzeichen nicht.*

Das bedeutet:

- Um den Vorzeichenwechseltest bei einer kritischen Stelle x durchzuführen muss jeweils nur eine Kontrollstelle links und nur eine Kontrollstelle rechts der kritische Stelle in f' eingesetzt werden.
- Jede der beiden Kontrollstellen kann völlig beliebig gewählt werden, solange man nicht die nächst kleinere bzw. die nächst größere kritische Stelle erreicht

Als *Beispiel* bestimmen wir die Hoch- und Tiefpunkte der Gewinnfunktion des kleinen afrikanischen Dorfes, $f(x) = -0{,}01x^5 + 9{,}5x^2 - 1{,}25$, mithilfe des Vorzeichenwechseltests

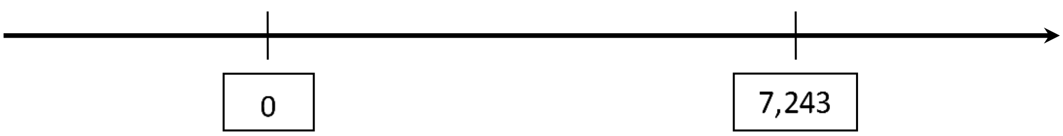
Schritt 1. Berechnen der Ableitung: $f'(x) = -0{,}05x^4 + 19x$

Schritt 2. Berechnen der kritischen Stellen – Nullsetzen der ersten Ableitung:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ bzw. } \underline{\underline{x = 7{,}243}}$$

Diese Rechnungen ergeben sich aus dem hinreichenden Kriterium und wurden oben schon durchgeführt.

Es ist nun ratsam, sich die kritischen Stellen auf einem Zahlenstrahl zu veranschaulichen:



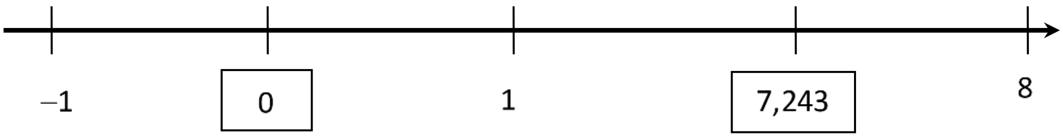
Schritt 3. Wählen von Kontrollstellen zum Überprüfen des Vorzeichenwechsels an der Stelle $x = 0$:

- Kontrollstelle links von $x=0$: Da links keine weitere kritische Stelle liegt, kann jede Zahl links der Null genommen werden, *zum Beispiel* -1.
- Kontrollstelle rechts von $x=0$: Diese muss zwischen 0 und der nächst größeren kritischen Stelle, also $7{,}243$, liegen. Es bietet sich hier *zum Beispiel* $+1$ an.

Schritt 4. Wählen von Kontrollstellen zum Überprüfen des Vorzeichenwechsels an der Stelle $x=7{,}243$:

- Kontrollstelle links von $x=7{,}243$: Diese muss zwischen $7{,}243$ und der nächst kleineren kritischen Stelle, also 0, liegen. Auch hier geht $+1$!
- Kontrollstelle rechts von $x=7{,}243$: Da rechts keine weitere kritische Stelle liegt, kann jede Zahl, rechts von $7{,}243$ genommen werden, *zum Beispiel* 8.

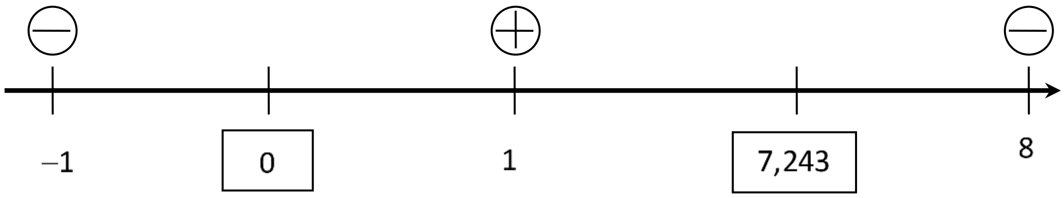
Zur Veranschaulichung werden die Kontrollstellen auf dem Zahlenstrahl eingetragen:



Schritt 5. Einsetzen der Kontrollstellen in f' und bestimmen des Vorzeichens:

$f'(-1)=-19{,}05$ Vorzeichen $-$ $f'(1)=18{,}95$, Vorzeichen $+$ $f'(8)=-52{,}8$, Vorzeichen $-$

Zur Veranschaulichung: Eintragen der Vorzeichen auf dem Zahlenstrahl.



Schritt 6. Anwenden des Vorzeichenwechselkriteriums für beide kritischen Stellen:

- Stelle $x=0$: f' macht einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ $\Rightarrow$ Tiefpunkt bei $x=0$.
- Stelle $x=7{,}243$: f' macht einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ $\Rightarrow$ Hochpunkt bei $x=7{,}243$.

Schritt 7. Berechnen der Koordinaten der Extrempunkte, indem die kritischen Stellen in $f(x)$ eingesetzt werden:

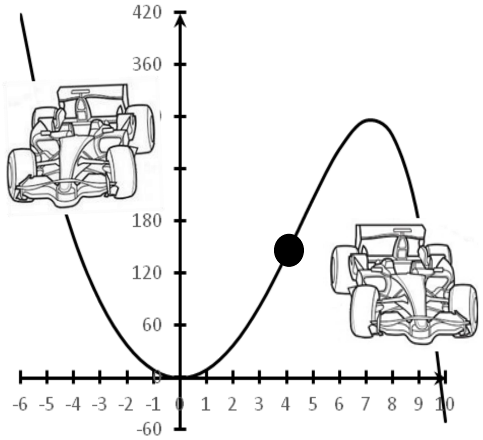
- Stelle $x=0$: $f(0)=-1{,}55 \Rightarrow \text{TP}(0|-1{,}25)$.
- Stelle $x=7{,}243$: $f(7{,}243)=297{,}789 \Rightarrow \text{HP}(7{,}243|297{,}789)$

Wir interpretieren noch die Bedeutung des Hochpunktes $\text{HP}(7{,}243|297{,}789)$ im Sachproblem: Der größte Gewinn liegt vor, wenn die neu kultivierte Fläche 7,243 ha groß ist. Der Gewinn beträgt dann $297{,}789\cdot 2=595{,}578\approx 595{,}58$ \$.

→ *Übung 3*

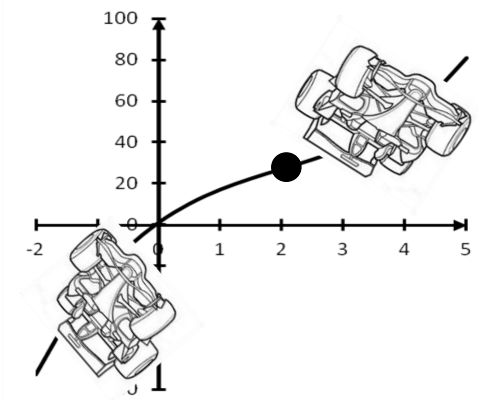
4. Krümmung und zweite Ableitung

Anders als bei linearen und auch bei quadratischen Funktionen, bestehen bei vielen Funktionen die Funktionsgraphen unterschiedlich **gekrümmten** Kurven, so auch der Graph der Gewinnfunktion für das Entwicklungshilfeprojekt, siehe Bild rechts. Stellt man sich den Graphen als Verlauf einer Straße vor, auf die man von oben schaut und auf der ein Auto von links nach rechts fährt, so verläuft der Graph aus dem negativen Teil der x-Achse kommend zunächst in einer **Linkskurve**. Etwa an der Stelle $x=4$ ändert sich die **Krümmung**. Ab hier verläuft der Graph als **Rechtskurve**.



Den Punkt, an dem sich die Krümmung von einer Links- in eine Rechtskurve wendet, nennt man **Links-Rechts-Wendepunkt**.

Anders ist es bei diesem Graphen: Bis zur Stelle $x=2$ ist der Graph eine **Rechtskurve**. Ab der Stelle $x=2$ ist der Graph eine **Linkskurve**.



Der Punkt, an dem sich die Krümmung von einer Rechts- in eine Linkskurve wendet, ist ein **Rechts-Links-Wendepunkt**.

Wie Wendepunkte berechnet werden können, werden wir später noch ausführlich untersuchen.

Zuerst klären wir aber, was mathematisch eigentlich unter der „Krümmung" eines Graphen zu verstehen ist. Überraschenderweise kann die Tatsache, ob ein Graph eine Links- oder eine Rechtskurve ist, mithilfe der ersten Ableitung charakterisiert werden. Wenn wir uns die beiden zuletzt gezeichneten Graphen genauer ansehen, stellen wir fest:

- Bei einer Linkskurve nimmt die Steigung von links nach rechts zu.
- Bei einer Rechtskurve nimmt die Steigung von links nach rechts ab.

Wir können also festhalten:

Definition. Eine Kurve ist eine
- **Linkskurve**, wenn ihre Steigung mit zunehmenden x-Werten *zunimmt*;
- **Rechtskurve**, wenn ihre Steigung mit zunehmenden x-Werten *abnimmt*.

Weil f' die Steigung ist, kann das so formuliert werden:

Eine Kurve ist eine
- **Linkskurve**, wenn die Werte von f' zunehmen;
- **Rechtskurve**, wenn die Werte von f' abnehmen.

Wie kann man möglichst einfach entscheiden, ob die Werte einer Funktion – wie hier f' – zunehmen (wachsen) oder abnehmen (fallen)? Die Antwort ist einfach: Indem man ihre Ableitung untersucht. Wir haben nämlich schon festgehalten:

- Ableitung der Funktion positiv $\Rightarrow$ die Funktionswerte werden größer;
- Ableitung der Funktion negativ $\Rightarrow$ die Funktionswerte werden kleiner.

Die Funktion, die wir auf zunehmende oder abnehmende Wert untersuchen müssen, ist f'. Damit ergibt sich:

- Ableitung von f' positiv
  $\Rightarrow$ die Werte von f' werden größer (nehmen zu)
  $\Rightarrow$ der Graph von f ist eine Linkskurve**;**
- Ableitung von f' negativ
  $\Rightarrow$ die Werte von f' werden kleiner (nehmen ab)
  $\Rightarrow$ der Graph von f ist eine Rechtskurve**.**

Die Ableitung von f' ist die zweite Ableitung f''. Deshalb können wir unsere Überlegungen wie folgt zusammenfassen:

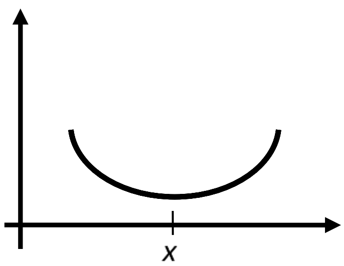
> Eine Kurve ist eine
> - **Linkskurve**, wenn $f''(x) > 0$ ist;
> - **Rechtskurve**, wenn $f''(x) < 0$ ist.

Während also die erste Ableitung über die Steigung eines Graphen informiert, informiert die zweite Ableitung über seine Krümmung.

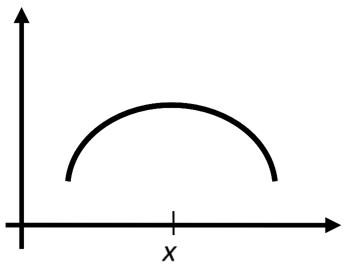
5. Hoch- und Tiefpunkte und die zweite Ableitung

Interessanterweise kann man unser neues Wissen über f'' und die Krümmung eines Graphen verwenden, um ein neues hinreichendes Kriterium für die Berechnung von Hoch- und Tiefpunkten zu formulieren. Dazu stellen wir uns vor, dass eine Funktion f an der Stelle x eine kritische Stelle hat, beim Graph im Punkt $P = (x \mid f(x))$ also eine waagerechte Tangente vorliegt.

Wenn der Graph dort eine Linkskurve ist, sieht der Graph so aus, wie es rechts dargestellt ist. Die Funktion hat an der Stelle x also einen Tiefpunkt.



Ist der Graph dort allerdings eine Rechtskurve, so muss der Graph so aussehen, wie es die linke Zeichnung andeutet. An der kritischen Stelle liegt also ein Tiefpunkt.



Unter welchen *Voraussetzungen* liegt aber an einer Stelle eine Linkskurve bzw. eine Rechtskurve vor? Dies können wir mithilfe der zweiten Ableitung beantworten:

- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Graph von f ist eine Linkskurve;
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Graph von f ist eine Rechtskurve.

Fassen wir alles zusammen, so ergibt sich:

Hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Hoch- oder Tiefpunktes – Kriterium mit der zweiten Ableitung.
Angenommen, x ist eine kritische Stelle von f. Dann gilt

- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ bei x liegt ein **Tiefpunkt**.
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ bei x liegt ein **Hochpunkt**.

Beachten Sie, dass wir aus $f''(x) = 0$ nicht schließen können, dass f an der Stelle x weder Hoch- noch Tiefpunkt hat. In diesem Fall kann man über das Vorliegen eines Extrempunktes keine weitere Aussage machen und muss den Vorzeichenwechseltest heranziehen.

Als *Beispiel* untersuchen wir die Gewinnfunktion aus dem Entwicklungshilfeprojekt nochmal auf Extrempunkte, verwenden diesmal aber nicht den Vorzeichenwechseltest sondern das Kriterium mit der zweiten Ableitung. Zur Erinnerung: Die Funktion hat die Gleichung $f(x) = -0{,}01x^5 + 9{,}5x^2 - 1{,}25$.

Schritt 1. Berechnen der ersten beiden Ableitungen: $f'(x) = -0{,}05x^4 + 19x$ sowie $f'(x) = -0{,}2x^3 + 19$.

Schritt 2. Berechnen der kritischen Stellen – Nullsetzen der ersten Ableitung:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}} \text{ bzw. } \underline{\underline{x = 7{,}243}},$$

siehe oben.

Schritt 3. Einsetzen der kritischen Stellen in $f''(x)$:

- $f''(0) = 19 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt bei $x = 0$
- $f''(7{,}243) = -57 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt bei $x = 7{,}243$. → *Übung 4*

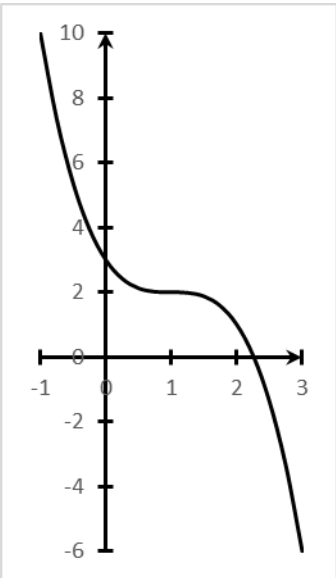
6. Vergleich der beiden Kriterien

Bei ganzrationalen Funktionen führt das Kriterium mit der zweiten Ableitung meist schneller zum Ziel als das Vorzeichenwechselkriterium. Dies haben wir zum Beispiel bei der Untersuchung der Gewinnfunktion des Entwicklungshilfeprojekts ganz eindeutig gesehen. Warum braucht man also überhaupt den Vorzeichenwechseltest?

Zur Beantwortung dieser Frage ist zunächst darauf hinzuweisen, dass die Berechnung der zweiten Ableitung bei komplizierteren Funktionsklassen (zum Beispiel bei gebrochen rationalen Funktionen oder Potenzfunktionen) die Berechnung der zweiten Ableitung sehr umständlich und arbeitsaufwändig sein kann. Hier ist es oft einfacher, den Vorzeichenwechseltest zu machen, also die zweite Ableitung zu berechnen.

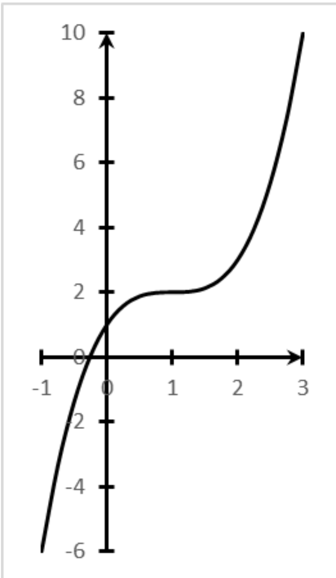
Ein zweiter Aspekt ist, dass das Kriterium mit der zweiten Ableitung versagt, wenn an der kritischen Stelle auch die zweite Ableitung Null ist: Folgende vier Funktionen haben alle an der Stelle $x=1$ eine kritische Stelle, außerdem ist auch die zweite Ableitung an der Stelle $x=1$ Null. Sie verhalten sich aber an dieser Stelle völlig unterschiedlich: Eine hat einen Hochpunkt, eine einen Tiefpunkt und zwei haben weder einen Hoch- noch einen Tiefpunkt:

$f_1(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 3$



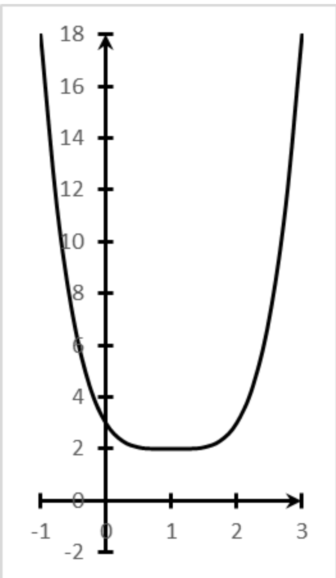
weder HP noch TP bei $x=1$

$f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$



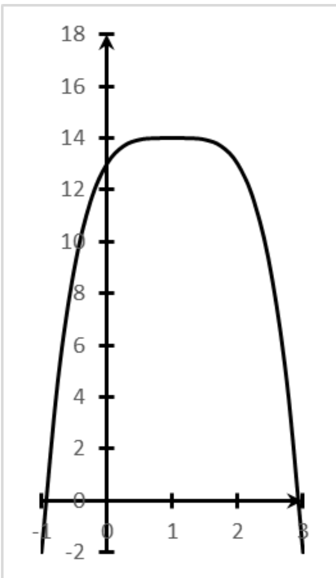
weder HP noch TP bei $x=1$

$f_3(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 3$



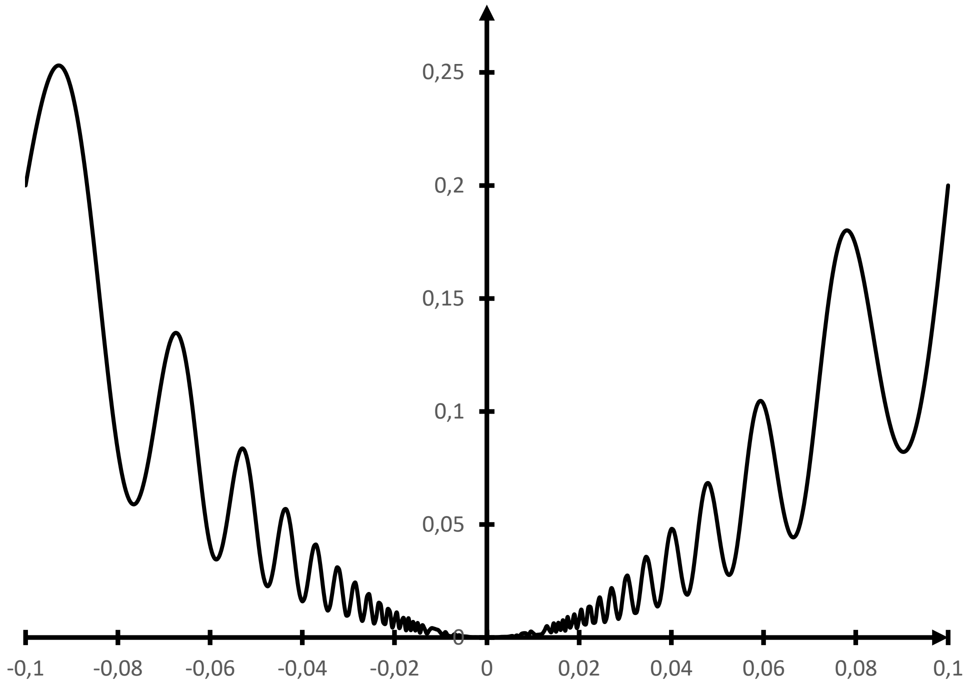
ein TP bei $x=1$

$f_4(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 13$



ein HP bei $x=1$

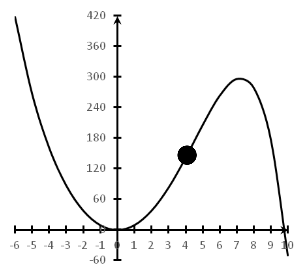
Das Vorzeichenwechselkriterium versagt nur bei Funktionen, die unendlich viele kritische Stellen haben, die sich an einer Stelle häufen. Eine solche Funktion ist hier gezeichnet:



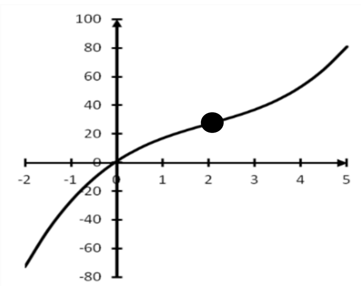
Bei dieser „Zitterfunktion“ gibt es in der Nähe von $x=0$ unendlich viele kritische Stellen. (Zur Information: Die Gleichung dieser Funktion ist $f(x)=10x^2\cdot\left(2+\sin\left(\pi/(2x)\right)\right)$ für $x\neq 0$ und $f(0)=0$. Keine Sorge: Die sinus-Funktion wird im weiteren Verlauf des Kurses nicht mehr vorkommen!)

→ *Übung 5*

7. Wendepunkte



Wir hatten oben schon auf den Begriff des Wendepunktes hingewiesen: In einem Links-Rechts-Wendepunkt (siehe links dargestellter Graph) geht eine Links- in eine Rechtskurve über. In einem Rechts-Links-Wendepunkt (siehe rechts dargestellter Graph) geht eine Rechts- in eine Linkskurve über.



Wir analysieren die Steigung in der Näher der Wendepunkte anhand der Graphen.

Bei dem Links-Rechts-Wendepunkt stellen wir das folgende Verhalten fest:

Steigung		
links vom Wendepunkt	rechts vom Wendepunkt	also am Wendepunkt
nimmt zu	nimmt ab	am größten!

Bei dem Rechts-LinksWendepunkt sehen wir:

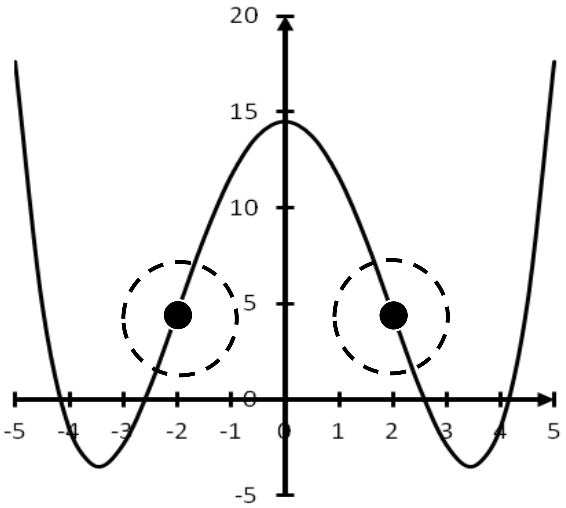
Steigung		
links vom Wendepunkt	rechts vom Wendepunkt	also am Wendepunkt
nimmt ab	nimmt zu	am kleinsten!

Wir nehmen deshalb die folgende vorläufige Charakterisierung des Begriffs „Wendepunkt“ vor.

- **Wendepunkte** sind die Punkte einer Kurve, an denen die Steigung maximal oder minimal ist.
- Ein **Links-Rechts-Wendepunkt** liegt vor, wenn die Steigung *maximal* ist.
- Ein **Rechts-Links-Wendepunkt** liegt vor, wenn die Steigung *minimal* ist.

Aber Achtung: Der rechts gezeichnete Graph hat einen Links-Rechts-Wendepunkt bei $x=-2$, die Steigung ist aber z.B. bei $x=5$ größer. Er hat einen Rechts-Links-Wendepunkt bei $x=2$, die Steigung ist aber z.B. bei $x=-5$ kleiner.

Bei Wendepunkten ist die Steigung nur **lokal,** das heißt: in der Nähe der Punkte, am größten bzw. am kleinsten: Man kann einen Kreis um jeden der Punkte zeichnen, und innerhalb dieser Kreise ist die Steigung des Graphen am größten bzw. am kleinsten. Deshalb wird festgelegt:



(Verbesserte) Definition.
Ein Punkt $P=\left(x\mid f\left(x\right)\right)$ des Graphen von f ist ein

- **Wendepunkt**, wenn die Steigung in P *lokal maximal* oder *lokal minimal* ist. Die Stelle x wird **Wendestelle** genannt.
- **Links-Rechts-Wendepunkt**, wenn die Steigung in P *lokal maximal* ist. Die Stelle x wird **Links-Rechts-Wendestelle** genannt.
- **Rechts-Links-Wendepunkt**, wenn die Steigung *lokal minimal* ist. Die Stelle x wird **Rechts- Links-Wendestelle** genannt.

Dabei bedeutet

- lokal minimal: Man kann einen Kreis mit Mittelpunkt P zeichnen, sodass innerhalb dieses Kreises in P die Steigung am kleinsten ist;
- lokal maximal: Man kann einen Kreis mit Mittelpunkt P zeichnen, sodass innerhalb dieses Kreises in P die Steigung am größten ist.

Die Steigung ist nichts anderes als die Ableitung f'. Die Definition besagt also, dass $P=\left(x\mid f\left(x\right)\right)$

- ein **Links-Rechts-Wendepunkt**, wenn f' an der Stelle x *lokal maximal* ist.
- ein **Rechts-Links-Wendepunkt**, wenn f' an der Stelle x *lokal minimal* ist.

Dass eine Funktion „lokal maximal“ bzw. „lokal minimal“ ist, bedeutet nichts anderes, als dass sie dort einen Hochpunkt bzw. einen Tiefpunkt hat. Also:

- f hat an der Stelle x einen **Links-Rechts-Wendepunkt**
  $\Leftrightarrow$ f' hat an der Stelle x einen **Hochpunkt**.
- f hat an der Stelle x einen **Rechts-Links-Wendepunkt**
  $\Leftrightarrow$ f' hat an der Stelle x einen **Tiefpunkt**.

Kriterien für das Vorliegen eines Wendepunktes erhält man also, indem man die Kriterien für Hoch- und Tiefpunkte statt für die Funktion f nun für die Funktion f' formuliert. *Praktisch* bedeutet dies, dass man bei allen Funktionen jeweils *einen Strich hinzufügt*.

Das Notwendige Kriterium für Extrempunkte wird zu:

Notwendiges Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunkts.
An der Stelle x kann *nur dann* ein Wendepunkt liegen, wenn $f''(x)=0$ ist.

…. denn nur dann kann f' dort einen Hoch- oder Tiefpunkt haben.

Das Vorzeichenwechselkriterium für Extrempunkte wird zu:

Hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes
– Vorzeichenwechselkriterium.
Angenommen, es gilt $f''(x)=0$. Dann liegt bei x

- ein *Links-Rechts-Wendepunkt*, falls f'' an der Stelle x einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ macht.
- ein *Rechts-Links-Wendepunkt*, falls f'' an der Stelle x einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ macht.
- *kein Wendepunkt*, falls f'' an der Stelle x *keinen* Vorzeichenwechsel macht, also links positiv und auch rechts positiv oder links negativ und auch rechts negativ ist.

… denn im ersten Fall hat f' einen Hochpunkt, im zweiten einen Tiefpunkt und im dritten weder einen Hochpunkt noch einen Tiefpunkt.

Das Kriterium mit der zweiten Ableitung für Extrempunkte wird zu:

Hinreichendes Kriterium für das Vorliegen eines Wendepunktes
– Kriterium mit der dritten Ableitung.
Angenommen, es ist $f''(x)=0$. Dann gilt

- $f'''(x)<0 \Rightarrow$ bei x liegt ein **Links-Rechts-Wendepunkt**.
- $f'''(x)>0 \Rightarrow$ bei x liegt ein **Rechts-Links-Wendepunkt**.

… denn im ersten Fall hat f' einen Hochpunkt, im zweiten einen Tiefpunkt. Dieses letzte Kriterium werden wir in vielen Fällen heranziehen.

Als Beispiel berechnen der Wendepunkte für die Gewinnfunktion des Entwicklungshilfeprojekts $f(x) = -0{,}01x^5 + 9{,}5x^2 - 1{,}25$ mithilfe des letzten Kriteriums.

Schritt 1. Berechnen der ersten drei Ableitungen:

$$f'(x) = -0{,}05x^4 + 19x,\ f''(x) = -0{,}2x^3 + 19,\ f'''(x) = -0{,}6x^2.$$

Schritt 2. Nullsetzen von f'': $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}563$ Nur an dieser Stelle kann ein Wendepunkt liegen (nach dem notwendigen Kriterium).

Schritt 3. Einsetzen in die dritte Ableitung:
$f'''(4{,}563) = -12{,}49 < 0 \Rightarrow$ an der Stelle $x = 4{,}563$ ist ein Links-Rechts-Wendepunkt.

Schritt 4. Berechnen der Koordinaten des Wendepunktes: $\text{LRW}(4{,}563|176{,}768)$. → *Übung 6*

Übungen zur Lerneinheit
Kurven mithilfe der Differentialrechnung untersuchen

Übung 1.

1. Berechnen Sie für die Gewinnfunktion des kleinen afrikanischen Dorfes die Werte $f'(1)$, $f'(6)$, $f'(8)$ und $f'(9)$ und geben Sie an, was die berechneten Werte im Sachproblem bedeuten.
2. Sylvia ist Diabetikerin. Vor einer Mahlzeit spritzt sie Insulin. Der Verlauf ihres Blutzuckerspiegels in den darauf folgenden 120 Minuten kann näherungsweise mit der durch
$$f(x) = -0{,}05x^4 + 0{,}66x^3 - 0{,}89x^2 + 130$$
gegebenen Funktion dargestellt werden. Dabei wird die Zeit x, die seit der Insulingabe vergangen ist, in Einheiten zu 10 Minuten angegeben und der Blutzuckerspielgel $f(x)$ in Milligramm pro Deziliter Blut (mg/dl). $f(0) = 130$ bedeutet also, dass Sylvia zum Zeitpunkt der Insulingabe einen Blutzuckerspiegel von 130 mg/dl hatte.
Bestimmen Sie f'. Berechnen Sie dann die Werte $f'(0{,}5)$, $f'(2)$, $f'(9)$ sowie $f'(10)$ und interpretieren Sie diese Werte im Sachproblem.
3. Carola steht kurz vor dem Abitur. Sie bereitet sich gerade intensiv auf ihre erste LK-Klausur vor. Dabei hat sie festgestellt, dass ihre Konzentrationsfähigkeit im Lauf des Tages nicht konstant ist sondern schwankt. Im Lauf des Vormittags kann sich Carola ziemlich gut konzentrieren, wohingegen sie am Nachmittag in ein „Loch“ fällt. Der zeitliche Verlauf ihrer Konzentrationsfähigkeit in den 12 Stunden von morgens um 7 Uhr bis abends um 19 Uhr kann näherungsweise mithilfe der durch
$$f(x) = 0{,}075x^4 - 1{,}52x^3 + 7{,}65x^2 + 50$$
gegebenen Funktion dargestellt werden. Dabei wird die Zeit x, die seit 7 Uhr morgens vergangen ist, in Stunden gemessen und $f(x)$ gibt an, wieviel Prozent der maximal möglichen Konzentrationsleistung zum Zeitpunkt x erreicht sind, wobei 0 % keiner und 100 % der maximal möglichen Konzentrationsleistung entspricht. $f(0) = 50$ bedeutet also, dass Carola um 7 Uhr 50 % ihrer maximal möglichen Konzentrationsleistung hatte.
Bestimmen Sie f'. Berechnen Sie dann die Werte $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(6)$, $f'(7)$ sowie $f'(11)$ und interpretieren Sie diese Werte im Sachproblem.
4. Die Großküche, die die städtischen Schulen und Kindergärten einer Stadt mit Mittagessen beliefert, kalkuliert Ihren Gewinn mit der durch die Gleichung
$$f(x) = -0{,}2x^3 + 0{,}8x^2 + 2{,}7x - 1{,}8$$
gegebenen Gewinnfunktion. Dabei entspricht eine x-Einheit 40 Beschäftigten und eine y-Einheit 200 € Gewinn in der Woche.
Bestimmen Sie f'. Berechnen Sie dann die Werte $f'(1)$, $f'(3)$, $f'(4)$ sowie $f'(5)$ und interpretieren Sie diese Werte im Sachproblem.

5. In einer Klinik wird ein neues Mittel zur Behandlung von ADHS klinisch erprobt. Pharmakokinetische[1] Untersuchungen haben ergeben, dass die Menge an Wirkstoff, die sich in den 11 Stunden nach der Einnahme einer Tablette im Blut befindet, mithilfe der durch
$f(x)=x^3-22{,}8x^2+140{,}61x-118{,}81$
gegebenen Funktion modelliert werden kann. Dabei wird x in Stunden und $f(x)$ in mg angegeben.
Bestimmen Sie f'. Berechnen Sie dann die Werte $f'(2)$, $f'(4)$, $f'(7)$ sowie $f'(9)$ und interpretieren Sie diese Werte im Sachproblem.

Übung 2.

1. Bestimmen Sie die kritischen Stellen der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen (und damit alle möglichen Stellen, an denen ein Hoch- bzw. ein Tiefpunkt vorliegen kann).
   a) $f(x)=x^3+1{,}5x^2+6x-1$ b) $f(x)=x^3-3x^2-24x+3$
   c) $f(x)=x^3-12x^2+45x-2$ d) $f(x)=-x^3+9x^2-24x+5$
   e) $f(x)=2x^3-6x^2-18x+4$ f) $f(x)=4x^3+3x^2-36x-10$
   g) $f(x)=-2x^3-16{,}5x^2-27x-8$ h) $f(x)=3x^3+15{,}75x^2+11{,}5$
2. Bestimmen Sie alle Stellen, an denen die durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen eine Hoch- oder einen Tiefpunkt haben können.
   a) $f(x)=5x^4+4x-3$ b) $f(x)=3x^5-2x^3-2$
   c) $f(x)=-6x^4+2x^3+8$ d) $f(x)=0{,}75x^4+2x^3-36x^2+1$
   e) $f(x)=0{,}3x^5+2{,}5x^3-54x-5$ f) $f(x)=0{,}125x^8-9x^5-98x^2-1$
   g) $f(x)=-5x^4-8x^2+2$ h) $f(x)=0{,}15x^4-2x^3+7{,}5x^2-3{,}75$

Übung 3.

1. Bestimmen Sie mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums die Hoch- und Tiefpunkt der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen.
   a) $f(x)=x^3+1{,}5x^2+6x-1$ b) $f(x)=x^3-3x^2-24x+3$
   c) $f(x)=x^3-12x^2+45x-2$ d) $f(x)=-x^3+9x^2-24x+5$
   e) $f(x)=2x^3-6x^2-18x+4$ f) $f(x)=4x^3+3x^2-36x-10$
   g) $f(x)=-2x^3-16{,}5x^2-27x-8$ h) $f(x)=3x^3+15{,}75x^2+11{,}5$

2. Bestimmen Sie mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums die Extrempunkt der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen.
   a) $f(x)=5x^4+4x-3$ b) $f(x)=3x^5-2x^3-2$
   c) $f(x)=-6x^4+2x^3+8$ d) $f(x)=0{,}75x^4+2x^3-36x^2+1$
   e) $f(x)=0{,}3x^5+2{,}5x^3-54x-5$ f) $f(x)=0{,}125x^8-9x^5-98x^2-1$
   g) $f(x)=-5x^4-8x^2+2$ h) $f(x)=0{,}15x^4-2x^3+7{,}5x^2-3{,}75$

[1] Pharmakokinetik = Lehre von den Konzentrationsveränderungen der Arzneistoffe im Organismus in Abhängigkeit von der Zeit

Übung 4.

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung die Hoch- und Tiefpunkte der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen.
   a) $f(x)=x^3-7{,}5x^2-18x+1{,}5$ b) $f(x)=-x^3-6{,}75x^2-13{,}5x+2{,}75$
   c) $f(x)=x^3-15x^2+56{,}25x+15{,}75$ d) $f(x)=2x^3+3{,}3x^2-65{,}52x-35{,}85$
   e) $f(x)=3x^3+23{,}4x^2+53{,}55x+75{,}83$ f) $f(x)=-0{,}5x^3-3{,}15x^2+114{,}885x-3{,}8$
   g) $f(x)=-4x^3-13{,}8x^2+353{,}76x-4{,}9$ h) $f(x)=2x^3-37{,}2x^2+190{,}08x+53{,}7$
2. Bestimmen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung die Hoch- und Tiefpunkte der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Funktionen.
   a) $f(x)=4x^4-3x^2+2$ b) $f(x)=6x^5+4x^2-7$
   c) $f(x)=-0{,}15x^4+1{,}4x^3-3x^2-0{,}75$ d) $f(x)=1{,}5x^4+2x^3+6x^2+12x$
   e) $f(x)=-0{,}5x^6-7{,}5x^2-3{,}5$ f) $f(x)=-0{,}2x^5+2x^3+27x-1$
   g) $f(x)=0{,}3x^{10}-4x^6+18x^2+4$ h) $f(x)=0{,}12x^5+0{,}15x^4+4x^3$

Übung 5.

a) Bestimmen Sie für die Funktionen f_1, f_2, f_3 sowie f_4 sämtliche kritischen Stellen.
b) Überprüfen Sie, dass auch die zweite Ableitung dieser Funktionen an der (kritischen) Stelle $x=1$ den Wert Null hat.
c) Überprüfen Sie jeweils mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums, ob an der Stelle $x=1$ ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt oder kein Extrempunkt vorliegt.

Übung 6.

1. Berechnen Sie für die Gewinnfunktion des kleinen afrikanischen Dorfes die Wendepunkte mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums.
2. Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen der Funktion f.
   a) $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$ b) $f(x)=-2x^3+6x^2-x+2$
   c) $f(x)=-4x^3+1{,}5x^2+2{,}5x-3$ d) $f(x)=5x^3-4{,}5x^2+4{,}75x+1$
   e) $f(x)=6{,}25x^3+3{,}75x^2-3{,}75x+1{,}75$ f) $f(x)=-4{,}8x^3+14{,}4x^2-2{,}55x-1{,}3$
   g) $f(x)=-7{,}5x^3-22{,}5x^2+8{,}45x+6{,}9$ h) $f(x)=1{,}8x^3+10{,}8x^2+2{,}9x-6$
3. Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen der Funktion f.
   a) $f(x)=x^4-2x^3-120x^2+8{,}5x-9$ b) $f(x)=-x^4+2x^3-12x^2-15x+6$
   c) $f(x)=0{,}25x^4-4x^3+18x^2-6{,}25x-2$ d) $f(x)=0{,}5x^4-48x^2+15x-25$
   e) $f(x)=-2x^4+8x^3-63x^2-10{,}5x+3{,}5$ f) $f(x)=-3x^4-37{,}5x^3-141{,}75x^2+5{,}8x$
4. Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f.
   a) $f(x)=x^3-2{,}25x^2-7{,}5x-2{,}4$ b) $f(x)=-x^3+2{,}4x^2+18{,}36x+27{,}9$
   c) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+1{,}8x^2-9{,}01x-3{,}02$ d) $f(x)=-2x^3+19{,}44x+15{,}55$
   e) $f(x)=x^3-6{,}45x^2+12{,}6x+1{,}75$ f) $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-7{,}3x^2-38{,}85x+4{,}3$
   g) $f(x)=x^3-16{,}35x^2+85{,}8x+11{,}9$ h) $f(x)=-2{,}5x^3+46{,}5x^2-237{,}6x-1{,}9$
5. Skizzieren Sie jeweils einen Funktionsgraphen mit den folgenden Bedingungen:

a) genau ein Wendepunkt, keine Extrempunkte.
b) genau ein Wendepunkt, genau ein Hochpunkt und genau ein Tiefpunkt.
c) genau ein Wendepunkt, genau ein Hochpunkt und kein Tiefpunkt.
d) genau zwei Wendepunkte, keine Extrempunkte.
e) genau zwei Tiefpunkte, genau ein Hochpunkt und genau zwei Wendepunkte.
f) genau ein Tiefpunkt, kein Hochpunkt und genau zwei Wendepunkte.