Steigung und Ableitung

1. Ziele der Lerneinheit

In dieser Lerneinheit lernen Sie

- was eine Zeit-Weg-Funktion ist;
- wie sich die Geschwindigkeit aus der Zeit-Weg-Funktion ergibt;
- was die Steigung einer Kurve ist;
- wie man mithilfe von Sekanten die Steigung einer Kurve bestimmt;
- was man unter dem Differenzenquotienten versteht;
- was man unter einer differenzierbaren Funktion und ihrer Ableitung versteht;
- Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen kennen;
- was eine stetige Funktion ist;
- wie man Potenzfunktionen ableitet;
- grundlegende Ableitungsregeln kennen;
- dass man ganzrationale Funktionen unendlich oft ableiten kann, und wie man die Ableitungen einfach berechnet;
- und außerdem das Pascalsche Dreieck und den binomischen Lehrsatz kennen.

2. Die Zeit-Weg-Funktion und ihre Steigung

Für einen Autofahrer wird bei einer Fahrt auf einer Autobahn ab einem bestimmten Zeitpunkt $x=0$ der zurückgelegte Weg festgehalten. Die ermittelten Werte sind in der folgenden Tabelle angegeben:

vergangene Zeit in Minuten	20	45
zurückgelegter Weg in km	35	77,5

Wenn man davon ausgeht, dass der zurückgelegte Weg (im Wesentlichen) linear von der vergangenen Zeit abhängt, ergibt sich für die Funktion f, die aus der Fahrtzeit x die zu diesem Zeitpunkt zurückgelegte Strecke $f(x)$ berechnet, die Funktionsgleichung $f(x)=1{,}7x+1$.

Eine Funktion, die die Abhängigkeit eines Weges von der Zeit beschreibt, heißt auch **Zeit-Weg-Funktion**.

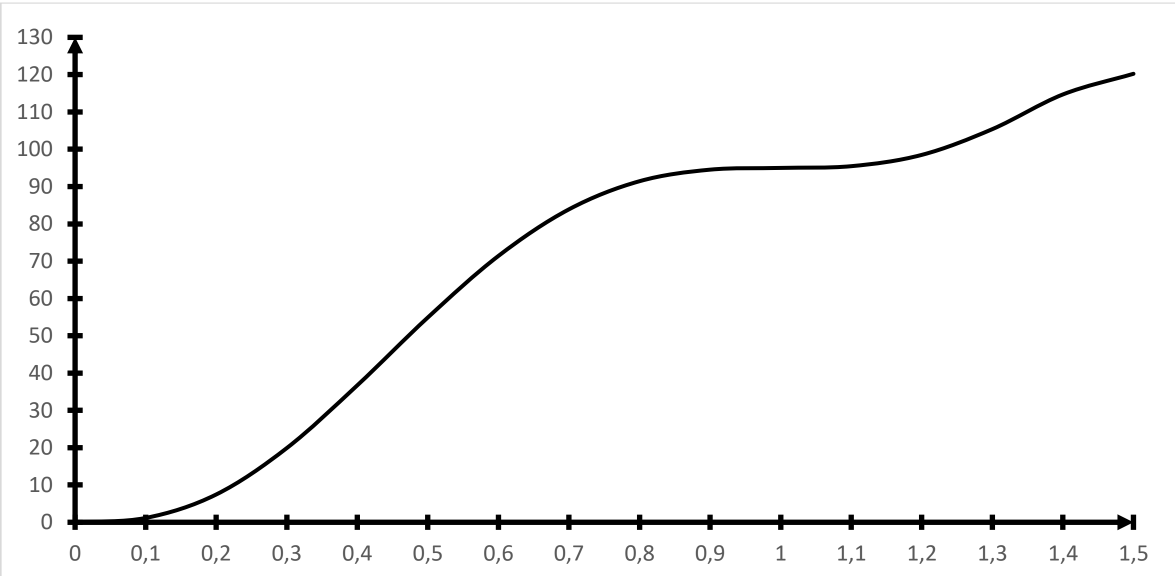
Wir untersuchen die Bedeutung der Steigung im Sachzusammenhang. Zur Erinnerung: Die Steigung gibt an, um welchen Wert sich der Funktionswert verändert, wenn x um 1 erhöht wird. Im vorliegenden Fall: Wird die Zeit um eine Minute erhöht, nimmt der zurückgelegte Weg um $1{,}7$ km zu. Anders formuliert: Das Auto bewegt sich um $1{,}7$ km je Minute bzw. um $1{,}7\cdot 60=102$ km pro Stunde. Das bedeutet:

Die Steigung der Zeit-Weg-Funktion ist die **Geschwindigkeit.**

In der Regel ist die Bewegung eines Autos nicht so gleichmäßig wie im vorliegenden Fall, bei dem während der gesamten Fahrt stets in gleichen Zeiträumen im Wesentlichen die gleiche Weglänge zurückgelegt wurde.

Bei einer anderen Autofahrerin hat die Zeit-Weg-Funktion für eine 1,5-stündige Fahrt die Gleichung $f(x) = -475x^6 + 1995x^5 - 2850x^4 + 1425x^3$, wobei x die seit Beginn der Fahrt vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ der zurückgelegte Weg ist. Am Ende der Fahrt ist die Fahrerin also $f(1{,}5) = 170{,}859375 \approx 170{,}9$ km zurückgelegt.

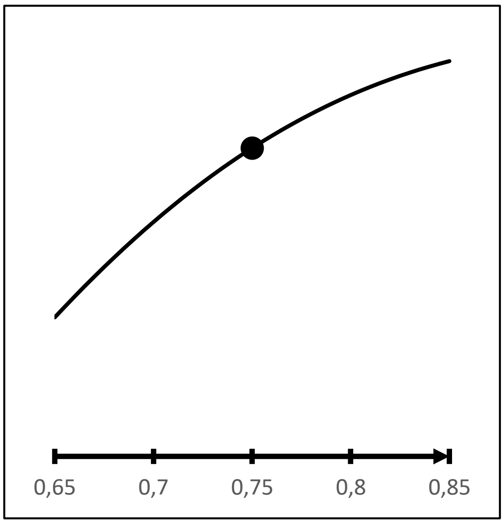
Der Graph der Funktion f über dem für das Sachproblem interessanten Intervall ist hier gezeichnet:



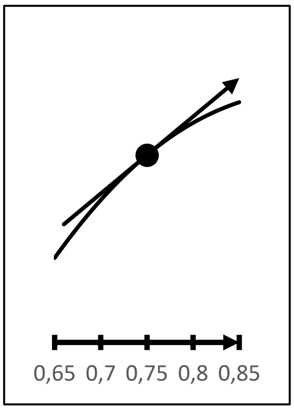
Zur Kontrolle: Wertetabelle mit gerundeten Funktionswerten:

0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0	1,2	7,4	19,9	36,7	54,9	71,4	83,9	91,4	94,5	95	95,5	98,5	105,4	114,7	120,2

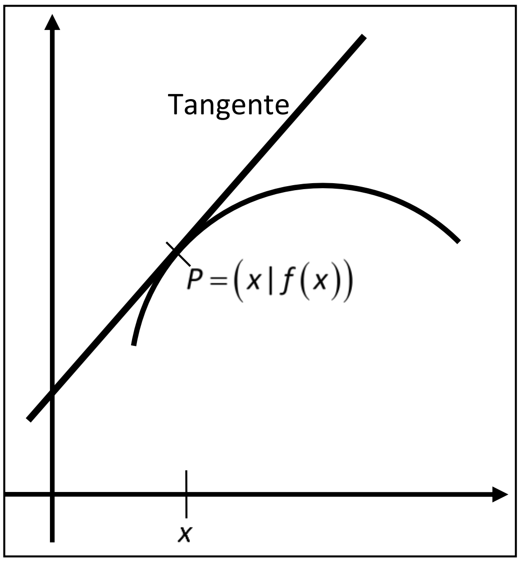
Frage: Welche Geschwindigkeit fuhr die Fahrerin 45 Minuten (also $x = 0{,}75$) nach Beginn der Fahrt? Der entsprechende Teil des Graphen ist rechts skizziert. Die Geschwindigkeit an dieser Stelle – also die Änderung des y-Wertes bezogen auf den x-Wert – ist, wie vorhin schon festgehalten, die Steigung des Graphen an der Stelle $x = 0{,}75$. Wie aber soll die Steigung einer Kurve – statt einer Geraden – bestimmt werden?



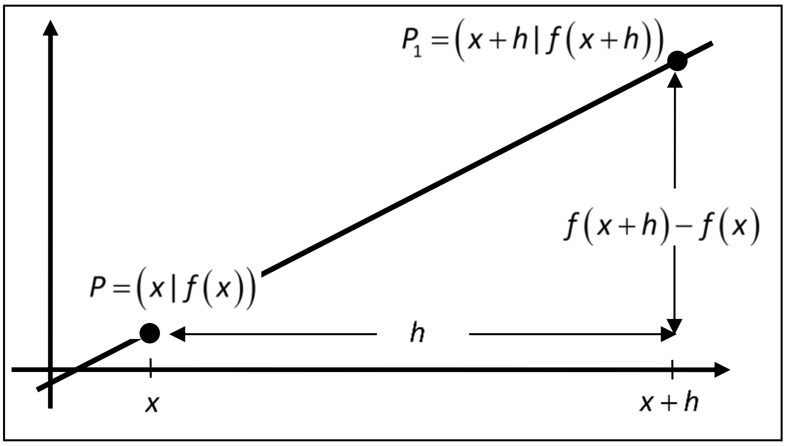
3. Tangentensteigungen



Würde der Graph an der Stelle $x = 0{,}75$ mit gleicher Steigung weiter verlaufen, würde er tangential in einer Geraden weiter laufen, siehe Bild links. Man legt deshalb folgendes fest:

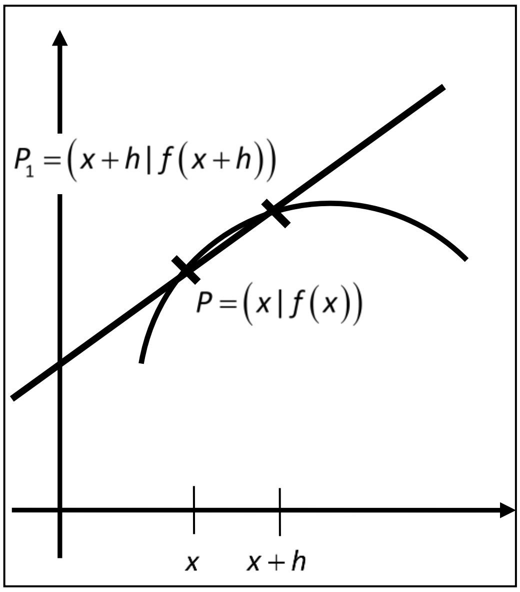


Die **Steigung des Graphen** der Funktion f an einer Stelle x ist die Steigung der Tangente, die man im Punkt $(x \mid f(x))$ an den Graphen anzeichnen kann. Zur Erinnerung: Eine **Tangente** ist eine Gerade, die eine Kurve nur in einem Punkt P berührt.



In der Regel kann die Steigung einer Geraden leicht berechnet werden: wenn man zwei Punkte auf der Geraden kennt, siehe Bild rechts. Dabei ist h der auf der x-Achse gemessene Abstand des zweiten Punktes vom ersten. Für die Steigung gilt dann die Formel

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



Problem: Von der Tangente ist nur ein Punkt bekannt, nämlich $P = (x \mid f(x))$!

Dieses Problem lösen wir so:

Wir wählen einen zusätzlichen zweiten Punkt P_1 auf dem Graphen, der *nahe bei* P liegt. Dann zeichnen wir durch P und P_1 eine Gerade. Diese Gerade heißt **Sekante**, da sie die Kurve in zwei Punkten trifft. Da zwei Punkte der Sekante bekannt sind, kann ihre Steigung berechnet werden:

$$m_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Der Index h bei m deutet an, dass die Steigung der Sekante vom Wert h abhängt. Wenn P_1 nicht zu weit von P entfernt ist, stimmt die Steigung der Sekante *ungefähr* mit der Steigung der Tangente überein. Je näher also der zweite Punkt bei P liegt, desto geringer wird der Unterschied zwischen der gesuchten Tangentensteigung und der berechneten Sekantensteigung sein. Um einen noch genaueren Wert für die Tangentensteigung zu bekommen, berechnet man die Sekantensteigung mit einem Punkt P_1, der noch näher an P liegt. Dies erreicht man, indem man für den Abstand h einen Wert nimmt, der möglichst nahe bei null liegt!

Zusammenfassung: Experimentelle Bestimmung der Steigung einer Kurve.

- Die Steigung der Kurve im Punkt $P=\left(x \mid f(x)\right)$ ist die Steigung der Tangente in diesem Punkt.
- Die Tangentensteigung ist ungefähr $m_h=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- Die Übereinstimmung ist umso größer, je näher h bei null liegt.
- Der Bruch $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ wird **Differenzenquotient** genannt.

Wir bestimmen auf diese Weise experimentell die Steigung der Zeit-Weg-Funktion mit der Gleichung $f(x)=-475x^6+1995x^5-2850x^4+1425x^3$ an der Stelle $x=0{,}75$. Als Abstand h wählen wir zunächst $h=0{,}1$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} m_{0,1} &= \frac{f(0{,}75+0{,}1)-f(0{,}75)}{0{,}1}=\frac{f(0{,}85)-f(0{,}75)}{0{,}1} \\ &= \frac{93{,}456391-88{,}2971191}{0{,}1}=51{,}5927187. \end{aligned}$$

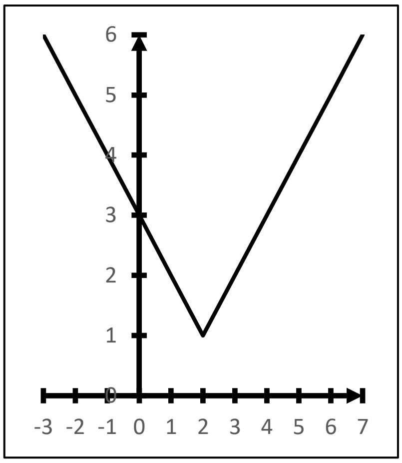
Dieser Wert ist nur eine erste Annäherung an die tatsächliche Steigung. Um die Steigung genauer zu bestimmen, ergänzen Sie die folgende Tabelle:

h	$f(0{,}75+h)$	$f(0{,}75+h)-f(0{,}75)$	m_h
0,1	93,456391	5,15927187	51,5927187
0,01	89,0236304		
0,001		0,07489609	
0,0001			
0,00001			

Mit Hilfsmitteln, die wir jetzt kennenlernen werden, kann man die Steigung sogar genau ermitteln: Sie beträgt $75{,}1464844$. Nach 45 Minuten fährt die Autofahrerin also mit einer Geschwindigkeit von rund 75 Kilometern pro Stunde.

→ *Übung 1*

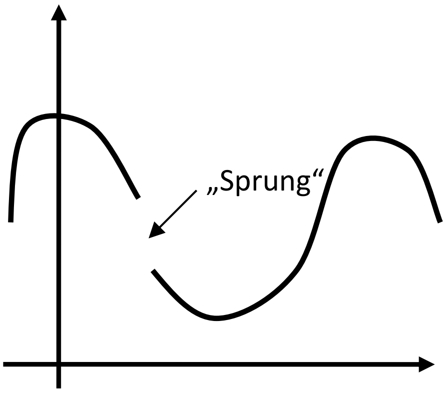
4. Differenzierbare und nicht differenzierbare Funktionen



Eine Warnung zunächst: Das oben beschriebene Verfahren, die Steigung des Graphen in einem Punkt P mithilfe der Tangente in diesem Punkt zu bestimmen, klappt bei vielen aber nicht bei allen Funktionen. Zum Beispiel kann man dem rechts gezeichneten Graphen einer „Knickfunktion“ in dem Punkt, in dem der „Kick“ ist, also in $P=(2|1)$, keine Tangente eindeutig anzeichnen, sodass man in diesem Punkt auch keine Steigung angeben kann. Dies ist grundsätzlich bei jeder Funktion so, deren Graph irgendwo einen „Knick“ hat!

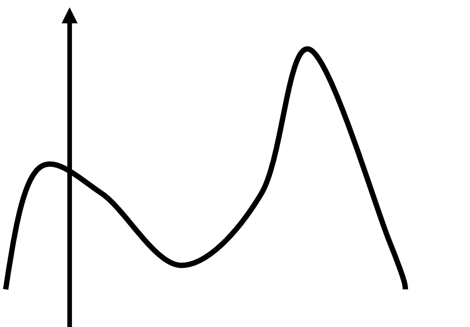
Dass man bei einer Funktion f in jedem Punkt die Steigung bestimmen kann, ist also durchaus etwas Besonderes und hat deshalb einen eigenen Namen verdient:

Definition. Kann man bei einer Funktion f an jeder Stelle die Steigung des Graphen als Tangentensteigung bestimmen, heißt die Funktion auch **differenzierbar**.

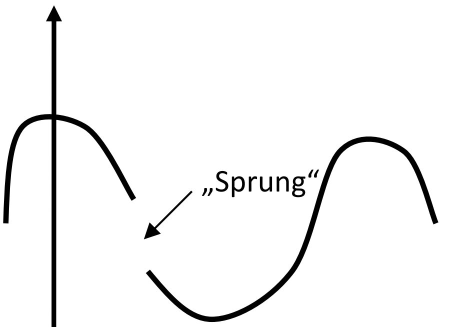


Ein weiteres Beispiel für nicht differenzierbare Funktionen sind Funktionen, deren Graph einen Sprung haben, siehe rechts. Sie sind an der „Sprungstelle“ nicht differenzierbar. Solche Funktionen unterscheiden sich grundsätzlich von denen, die wir bisher kennen gelernt haben: Beim Zeichnen des Graphen muss man den Stift absetzen. Funktionen, deren Graph man zeichnen kann, *ohne* den Stift abzusetzen, (zum Beispiel alle Funktionen, die uns bislang untergekommen sind) haben einen speziellen Namen: Sie heißen stetig:

(anschauliche!) Definition. f ist stetig, wenn man den Graphen (zumindest theoretisch) ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann.



stetig



nicht stetig

Für die Funktionswerte bedeutet Stetigkeit: Wenn zwei Stellen x_1 und x_2 sehr nahe beieinander liegen, dann liegen auch die Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ sehr nahe beieinander.
Jede differenzierbare Funktion ist stetig. Aber es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind, zum Beispiel die oben vorgestellte Knickfunktion.

5. Die Ableitung

Die Steigung des Graphen einer Funktion f an der Stelle x wird kurz mit $f'(x)$ (lies: f Strich von x) bezeichnet.

So haben wir oben für die durch $f(x)=-475x^6+1995x^5-2850x^4+1425x^3$ gegebene Funktion $f'(0{,}75)=75{,}1464844$ mitgeteilt und im Ansatz experimentell nachgewiesen.

Um auszudrücken, dass man $f'(x)$ erhält, indem man im Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ den Abstand h immer näher an die Null heran rückt, schreibt man auch

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} ,$$

was man so liest: $f'(x)$ ist der **Grenzwert** von $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für h **gegen Null**.

Wenn die Funktion f differenzierbar ist, also an jeder Stelle die Steigung des Graphen ermittelt werden kann, so existiert der Wert $f'(x)$ für jedes x. Damit ist f' (also diejenige Zuordnung, die jedem x die Steigung des Graphen von f an der Stelle x zuweist) eine Funktion. Sie heißt (erste) **Ableitung** von f.

Gott sei Dank wird sich herausstellen, dass alle bislang von uns betrachteten Funktionen, insbesondere alle ganzrationalen Funktionen, differenzierbar sind. Wie man ihre Steigungen bestimmt – wie man also $f'(x)$ für jede Zahl x berechnet – werden wir nun klären.

6. Steigungen bei Potenzfunktionen exakt berechnen

Unter **Potenzfunktionen** versteht man in der Mathematik Funktionen, deren Gleichung von der Form $f(x)=x^n$ ist, wobei n für eine natürliche Zahl steht. Potenzfunktionen sind also z.B. durch die Gleichungen $f(x)=x^2$ oder $f(x)=x^3$ oder $f(x)=x^4$ gegeben, aber auch durch $f(x)=x^1$ und $f(x)=x^0$. Um die Steigungen dieser Funktionen zu berechnen, werden wir stets in den folgenden Arbeitsschritten vorgehen:

(1) Der Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ wird aufgestellt.

(2) Der Differenzenquotient wird soweit wie möglich vereinfacht. Dabei wird es uns stets gelingen, dass in den entstehenden Term nicht mehr durch h geteilt werden muss.

(3) Im vereinfachten Differenzenquotienten untersuchen wir, welchen Wert dieser annimmt, wenn h immer näher bei Null liegt. Da nach den Vereinfachungen nicht mehr durch h geteilt wird, dürfen wir hierfür sogar $h=0$ einsetzen.

Wir beginnen mit der quadratischen Potenzfunktion.

A. Die quadratische Potenzfunktion

Wir arbeiten für die durch $f(x)=x^2$ gegebene Funktion die oben dargestellten Arbeitsschritte ab:

(1) Aufstellen des Differenzenquotienten: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

(2) Vereinfachen des Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=\frac{h\cdot(2x+h)}{h}=2x+h$$

Hierbei wurde die erste binomische Formel verwendet, dann wurde im Zähler zuerst zusammengefasst und dann h ausgeklammert. Am Ende wurde durch h gekürzt.

(3) Untersuchen, welchen Wert der vereinfachte Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x+h$$

annimmt, wenn h immer näher bei Null liegt. Da im Term $2x+h$ nicht mehr durch h dividiert wird, dürfen wir nun sogar 0 einsetzen:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x+0=2x.$$

Ergebnis:

Die durch $f(x)=x^2$ gegebene Funktion ist differenzierbar und für ihre Ableitung gilt $f'(x)=2x$.

B. Die kubische Potenzfunktion

Jetzt versuchen wir, für die durch $f(x)=x^3$ gegebene Funktion die oben dargestellten Arbeitsschritte abzuarbeiten.

(1) Aufstellen des Differenzenquotienten: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

Wollen wir nun diesen Term vereinfachen, stoßen wir auf das Problem, dass wir die Klammer $(x+h)^3$ auflösen müssen. Die binomischen Formeln können wir hier nicht verwenden, da diese nur für den Exponenten zwei gelten. Wir müssten also die Klammern „zu Fuß" ausrechnen: $(x+h)\cdot(x+h)\cdot(x+h)$. Doch glücklicherweise gibt es eine relativ einfache Verallgemeinerung der binomischen Formeln, die auch für von 2 verschiedene Exponenten richtig ist: den Binomischen Lehrsatz.

C. Der binomische Lehrsatz und das Pascalsche Dreieck

Soll die (erste) binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ für höhere Exponenten als zwei verallgemeinert werden, um Formeln Klammerterme wie $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ aufzulösen, kann man den **binomischen Lehrsatz** verwenden. Um ihn zu formulieren, werfen wir zunächst einen Blick auf den Term $a^2 + 2ab + b^2$ des quadratischen Falls. Hier fällt auf: In diesem Term erscheinen die in $(a+b)^2$ vorkommenden Variablen a und b in folgender Form: Die Variable a erscheint im ersten Summanden in der zweiten Potenz (a^2), im zweiten Summanden in der ersten Potenz ($a = a^1$) und im dritten Term in der nullten Potenz (denn $a^0 = 1$). Umgekehrt erscheint die Variable b im ersten Summanden in der nullten Potenz ($b^0 = 1$), im zweiten Term in der ersten Potenz ($b = b^1$) und im dritten Term in der zweiten Potenz (b^2). Mit anderen Worten: Der Term für $(a+b)^2$ ist eine Summe von Produkten, in denen von links nach rechts

- der Exponent von a bei zwei beginnend von Summand zu Summand um 1 absteigt und
- der Exponent von b bei null beginnend von Summand zu Summand um 1 aufsteigt.

Zusätzlich hat jeder dieser Summanden einen Koeffizienten, der eine ganze Zahl. Das gilt ganz anlog im allgemeinen Fall:

Binomischer Lehrsatz, Teil 1
Der Term für $(a+b)^n$ ist eine Summe von Produkten, in denen von links nach rechts

- der Exponent von a bei n beginnend von Summand zu Summand um 1 absteigt und
- der Exponent von b bei null beginnend von Summand zu Summand um 1 aufsteigt.

Zusätzlich hat jeder dieser Summanden einen Koeffizienten, der eine ganze Zahl.

Die Summanden für $(a+b)^3$ sehen also – bis auf den ganzzahligen Koeffizienten – so aus: a^3b^0, a^2b^1, a^1b^2 und a^0b^3.

Die fehlenden Koeffizienten ergeben sich aus dem nach Blaise Pascal (1623-1663) benannten **Pascalschen Dreieck**

Blaise Pascal

0. Zeile						1					
1. Zeile					1		1				
2. Zeile				1		2		1			
3. Zeile			1		3		3		1		
4. Zeile		1		4		6		4		1	
5. Zeile	1		5		10		10		5		1
⋮	⋰										⋱

Im Pascalschen Dreieck ist jede Zahl die Summe der beiden Zahlen, die links und rechts schräg darüber stehen. Zum Beispiel in der 5. Zeile: $5 = 1 + 4$, $10 = 4 + 6$. Dies gilt auch für die Einsen am Rand, wenn man sich außerhalb des abgedruckten Dreiecks lauter Nullen vorstellt.

Die Zahlen der zweiten Zeile des Dreiecks sind die Koeffizienten der Summanden in der binomischen Formel. Ganz entsprechend gilt:

> **Binomischer Lehrsatz, Teil 2**
> Die Koeffizienten der Summanden im Term für $(a+b)^n$ befinden sich in der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks.

Die Formel für $(a+b)^3$ lautet also

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= 1\cdot a^3b^0 + 3\cdot a^2b^1 + 3\cdot a^1b^2 + 1\cdot a^0b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck heißen auch **Binomialkoeffizienten**, weil sie als Koeffizienten im binomischen Lehrsatz vorkommen. Sie werden mit $\binom{n}{k}$ (lies: n über k) bezeichnet.

Dabei ist $\binom{n}{k}$ die k-te Zahl in der n-ten Zeile des Dreiecks:

0. Zeile	$\binom{0}{0}$					
1. Zeile	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
2. Zeile	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
3. Zeile	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
4. Zeile	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
5. Zeile	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$
$\vdots$	$\iddots$					$\ddots$

→ *Übung 2*

Man kann den binomischen Lehrsatz also auch so formulieren:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n.$$

D. Die kubische Potenzfunktion - Fortsetzung

Wir können nun den zweiten und dritten Arbeitsschritt für die Berechnung von $f'(x)$ bei $f(x)=x^3$ durchführen.

(2) Vereinfachen des Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\frac{h\cdot\left(3x^2+3xh+h^2\right)}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

Hierbei wurde der binomische Lehrsatz verwendet, dann wurde im Zähler zuerst zusammengefasst und dann h ausgeklammert. Am Ende wurde durch h gekürzt.

(3) Untersuchen, welchen Wert der vereinfachte Differenzenquotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

annimmt, wenn h immer näher bei Null liegt. Da im Term $3x^2+3xh+h^2$ nicht mehr durch h dividiert wird, dürfen wir nun sogar 0 einsetzen:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2+3x\cdot 0+0^2=3x^2.$$

Ergebnis:

> Die durch $f(x)=x^3$ gegebene Funktion ist differenzierbar und für ihre Ableitung gilt $f'(x)=3x^2$.

→ Übung 3

E. Die allgemeine Potenzfunktion

Die bisherigen Ergebnisse lassen vermuten, dass $f'(x)$ bei Potenzfunktionen dadurch gebildet wird, dass die im Exponent stehende Zahl nach vorne gezogen wird und der Exponent selber um 1 verringert wird. Dies ist in der Tat richtig:

> **Potenzregel der Differentialrechnung.** $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

Insbesondere sind alle Potenzfunktionen *differenzierbar.*

→ Übung 4

7. Grundlegende Ableitungsregeln

Die Potenzregel reicht noch nicht aus, Funktionen mit komplizierterem Funktionsterm, wie zum Beispiel $f(x)=-475x^6+1995x^5-2850x^4+1425x^3$ abzuleiten. Eine Funktion **abzuleiten** oder zu **differenzieren** bedeutet dabei nichts anderes, als ihre Ableitung zu berechnen. Hierbei helfen drei weitere Ableitungsregeln, die jetzt behandelt werden.

A. Erste Konstantenregel

Sie lautet:

> **Erste Konstantenregel.** Wenn die Funktion f konstant ist, es also eine reelle Zahl c gibt, sodass $f(x)=c$ für alle x ist, dann gilt $f'(x)=0$.
> Kurz: Additive Konstanten fallen beim Ableiten weg.

Beispiele: *Alle* Funktionen mit den folgenden Gleichungen haben die Ableitung $f'(x)=0$:

✓ $f(x)=5$ ✓ $f(x)=172$ ✓ $f(x)=-10$ ✓ $f(x)=0$

B. Zweite Konstantenregel

Sie lautet:

> **Zweite Konstantenregel.** Wenn die Funktion f von der Form
> „Zahl mal differenzierbare Funktion"
> ist, dann ist f differenzierbar. Die Ableitung erhält man, indem man die Konstante unverändert lässt und die differenzierbare Funktion ableitet.
> Kurz: Multiplikative Konstanten bleiben beim Ableiten erhalten.

Beispiele:

✓ Die Funktion $f(x)=5x^4$ ist von der Form „Zahl (5) mal differenzierbare Funktion (x^4) ".
Die Ableitung ist $f'(x)=5\cdot 4x^3$ (5 bleibt stehen, x^4 wird abgeleitet).

✓ $f(x)=-6x^2 \Rightarrow f'(x)=-6\cdot 2x=-12x$

✓ $f(x)=-4{,}5x^{10} \Rightarrow f'(x)=-4{,}5\cdot 10x^9=-45x^9$

C. Summenregel

Sie lautet:

> **Summenregel.** Wenn der Term von f von der Form
> „differenzierbare Funktion $\pm$ differenzierbare Funktion $\pm\ldots\pm$ differenzierbare Funktion"
> ist, dann ist f differenzierbar. Die Ableitung erhält man, indem man in der Summe die einzelnen differenzierbaren Funktionen ableitet.
> Kurz: Summen werden summandenweise abgeleitet.

Beispiele:

✓ Die Funktion $f(x)=5x^4+x^2$ ist Summe der beiden differenzierbaren Funktionen $5x^4$ und x^2. Die Ableitung ist $f'(x)=5\cdot 4x^3+2x$ („Ableitung von $5x^4$ " + „Ableitung von x^2 ")

✓ $f(x)=-6x^2-4{,}5x^{10} \Rightarrow f'(x)=-6\cdot 2x+(-4{,}5)\cdot 10x^9=-12x-45x^9$

✓ $f(x)=7x^5+2 \Rightarrow f'(x)=7\cdot 5x^4+0=35x^4$ („Ableitung von $7x^5$ " + „Ableitung von 2 ")

Nun können wir $f(x)=-475x^6+1995x^5-2850x^4+1425x^3$ ableiten. Dazu leiten wir nach der Summenregel die einzelnen Summanden $-475x^6, 1995x^5, -2850x^4, 1425x^3$ ab. Dies geschieht nach der zweiten Konstantenregel, indem die Koeffizienten $-475, 1995, -2850, 1425$ unverändert stehen bleiben, und nach der Potenzregel, indem die Exponenten nach vorne gezogen werden und er Exponent dann um 1 verringert wird:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -475\cdot 6x^5+1995\cdot 5x^4-2850\cdot 4x^3+1425\cdot 3x^2 \\ &= -2850x^5+9975x^4-14200x^3+4275x^2 \end{aligned}$$

Aus den Ableitungsregeln ergibt sich sofort:

> Jede ganzrationale Funktion f ist differenzierbar. Ihre Ableitung ist wiederum eine ganzrationale Funktion, deren Grad um 1 kleiner ist als der Grad von f.

→ *Übung 5*

8. Höhere Ableitungen

Ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wiederum differenzierbar, so kann man f' ableiten. Die Ableitung von f' wird mit f'' bezeichnet und heißt zweite Ableitung von f. In diesem Fall sagt man, f ist **zweimal differenzierbar**. Entsprechend erklärt man die **dritte Ableitung** f''' als Ableitung von f'' usw. Für noch höhere Ableitungen ist die „Strich-Schreibweise“ meist unpraktisch. Um die k-te Ableitung zu kennzeichnen schreibt man deshalb manchmal auch $f^{(k)}$, also zum Beispiel $f^{(5)}$ statt f'''''.

Für ganzrationale Funktionen bedeutet das:

> Für jede ganzrationale Funktion f kann man $f', f'', f''', \ldots, f^{(10)}, \ldots, f^{(100)}, \ldots, f^{(1000)}, \ldots$ bilden, man kann sie **unendlich oft differenzieren**. Da sich der Grad der Ableitungen jeweils um 1 reduziert, ist $f^{(k)}(x) = 0$ sobald k größer ist als der Grad von f.

→ *Übung 6*

Noch ein Hinweis zur Geschichte der Differentialrechnung:

Gottfried Wilhelm Leibniz

Die Differentialrechnung entwickelten unabhängig voneinander der englische Naturwissenschaftler **Isaac Newton** (*25.12.1642, ✝20.03.1726, nach dem damals in England noch gültigen Julianischen Kalender; nach dem heute verwendeten gregorianischen Kalender entsprechen die Daten dem 04. 01.1643 und dem 31.03.1727) und der deutschen Naturwissenschaftler und Philosophe **Gottfried Wilhelm Leibniz** (* 21.06.1646 (julianischer Kalender) bzw. 01.07.1646 (gregorianischer Kalender), ✝14.11.1716).

Isaac Newton

Übungen zur Lerneinheit *Steigung und Ableitung*

Übung 1.

1. Bestimmen Sie experimentell die Steigung des Graphen der durch $f(x)=\sqrt{x}$ gegebenen Funktion an der Stelle $x=2$.
2. Bestimmen Sie experimentell die Steigung des Graphen der durch $f(x)=\sqrt[3]{x}$ gegebenen Funktion an der Stelle $x=4$.
3. Bestimmen Sie experimentell die Steigung des Graphen der durch $f(x)=2^x$ gegebenen Funktion an der Stelle $x=-1$.
4. Bestimmen Sie experimentell die Steigung des Graphen der durch $f(x)=x^2$ gegebenen Funktion an der Stelle $x=1$.

Übung 2.

1. Berechnen Sie die 6. und die 7. Zeile des Pascalschen Dreiecks sowie die Binomialkoeffizienten $\binom{8}{3}$, $\binom{8}{5}$ und $\binom{8}{8}$.
2. Schreiben Sie mithilfe des binomischen Lehrsatzes die Formeln für $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ und $(a+b)^6$ auf.
3. Vereinfachen Sie mithilfe des binomischen Lehrsatzes:

   a) $(a+2)^4$ b) $(3+b)^4$ c) $(2+h)^3$ d) $(3+h)^5$

   e) $(2x+y)^4$ f) $(x+3y)^5$ g) $(x-2y)^3$ h) $(a-b)^4$

Übung 3. Berechnen Sie durch Umformen des Differenzenquotienten $f'(x)$ für $f(x)=x^4$ sowie für $f(x)=x^5$.

Übung 4. Leiten Sie die folgenden Potenzfunktionen mithilfe der Potenzregel ab.

a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^3$ c) $f(x)=x^5$

d) $f(x)=x^6$ e) $f(x)=x^{100}$ f) $f(x)=x$

Übung 5.

1. Leiten Sie die folgenden Funktionen mithilfe der Ableitungsregeln ab.

   a) $f(x)=x^8+x^5$ b) $f(x)=x^4-x^3$ c) $f(x)=x^3+x$

   d) $f(x)=x^4+2$ e) $f(x)=x^9+x^5+6$ f) $f(x)=2x^6-3x^3$

   g) $f(x)=x^5+4x^3+3x^2-2$ h) $f(x)=-2x^4-3x^2+2$ i) $f(x)=6x^9-6x-8$
2. Differenzieren die folgenden Funktionen Sie mithilfe der Ableitungsregeln.

   a) $f(x)=2x^5+7x^2-5x$ b) $f(x)=0,2x^4-0,7x^2+5,4x$

   c) $f(x)=-x^{12}-17,15x^2+5x$ d) $f(x)=4,25x^5-2,1x^2-8,3x$

   e) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{9}{2}x+\frac{2}{5}$ f) $f(x)=8x^4-12x^3-4x^2$

g) $f(x)=9x^4-3x^3+5x-7$ h) $f(x)=4x^6+x^3-9x^2-x+2$

i) $f(x)=9x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-1,5x+8$ j) $f(x)=9x^6-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^2+3x$

k) $f(x)=8x^3-4x^2+x+9$ l) $f(x)=12x^4-0,8x^3-7x^2-8x+2$

Übung 6.

1. Leiten Sie die Funktionen mit den folgenden Gleichungen dreimal ab. Das heißt: Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung. Geben Sie jeweils an, ab der wievielten Ableitung die sich eine Funktion ergeben würde, die konstant Null ist.

   a) $f(x)=3x^4+2x^2$ b) $f(x)=5x^6-7x^3$

   c) $f(x)=7x^7+9x^3$ d) $f(x)=x^4-2x^3$

   e) $f(x)=3x^6-8x^2$ f) $f(x)=3x^2+8x+5$

   g) $f(x)=5x^4-8x^3+x$ h) $f(x)=8x^3-4x^2-9x$

   i) $f(x)=\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{8}x^4$ j) $f(x)=-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x$

   k) $f(x)=-\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{12}x^4+8$ l) $f(x)=\frac{5}{36}x^6+\frac{11}{18}x^3-\frac{7}{16}x^2$

   m) $f(x)=\frac{1}{14}x^7+\frac{5}{21}x^6-\frac{2}{3}x^3$ n) $f(x)=\frac{2}{21}x^7+\frac{4}{5}x^5-\frac{9}{20}x^4$

2. Finden Sie jeweils eine Funktion f, die die angegebene Ableitung hat.

   a) $f'(x)=3x^2+2x$ b) $f'(x)=4x^3-7x^6$ c) $f'(x)=9x^8-6x^5+8$

   d) $f'(x)=x^6+x^2$ e) $f'(x)=x^4-x^3$ f) $f'(x)=8x^3-6x^2$