Tipps zu Vortrag II (Johanna)

Tipp zur Lösung von b)

Für die unbekannte Verteilung vor einem Jahr, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 4.000 \\ 15.000 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & & & & & 0{,}5 \cdot x_3 & = & 2.000 \\ \text{II} & 0{,}6x_1 & & & & & = & 4.000 \\ \text{III} & & & 0{,}6x_2 & + & 0{,}8x_3 & = & 15.000 \end{array}$$

Dies ist leicht (auch ohne Gauß-Algorithmus zu lösen.

Tipp zur Lösung von d)

Der Bruterfolg der Altvögel wird dargestellt durch den Wert in der 1. Zeile, 3. Spalte (ganz rechts oben): von A_3 nach A_1.

Der Wert ist zunächst $0{,}5$. Ist der Wert der gesuchte neue Anteil b, ist dieser natürlich b und die „neue“ Matrix L sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Dass der Wert von Jahr zu Jahr gleich bleibt, bedeutet, dass für die unbekannte Anfangsverteilung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das folgende LGS:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & & & & & b \cdot x_3 & = & x_1 \\ \text{II} & 0{,}6x_1 & & & & & = & x_2 \\ \text{III} & & & 0{,}6x_2 & + & 0{,}8x_3 & = & x_3 \end{array}$$

Hier bringen Sie in jeder Zeile die Unbekannte auf die linke Seite:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{I} & -x_1 & & & & b\cdot x_3 & = & 0 \\ \text{II} & 0{,}6x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ \text{III} & & & 0{,}6x_2 & - & 0{,}2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Mit anderen Worten: Es ist $\begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0{,}6 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu lösen, wie in der Aufgabe angegeben.

Führen Sie jetzt in diesem LGS den Gauß-Algorithmus durch. Sie erhalten die folgende Zeilenstufenform

$$\begin{array}{lccccc} \text{I} & x_1 & & - & b\cdot x_3 & = & 0 \\ \text{II} & & x_2 & - & 0{,}6\cdot b\cdot x_3 & = & 0 \\ \text{III} & & & & (-0{,}2+0{,}36b)x_3 & = & 0 \end{array}$$

Versuchen Sie dies durch Rückwärtseinsetzen zu lösen, stellen Sie fest, dass die Gleichung III $(-0{,}2+0{,}36b)x_3 = 0$ für x_3 nur dann eine von Null verschiedene Lösung haben kann, wenn der Faktor $-0{,}2+0{,}36b$ Null ist. Aus dem Ansatz $-0{,}2+0{,}36b = 0$ ergibt sich $b = \frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$.

Eine Verteilung, die von Jahr zu Jahr konstant bleibt, erhält man dann so:

- Wähle x_3 beliebig positiv, z.B. $x_3 = 18.000$ (Wegen $b = 5/9$ nehme ich eine Zahl, die man durch 9 teilen kann.)
- Aus II ergibt sich dann $x_2 = 0{,}6\cdot\frac{5}{9}\cdot 18.000 = 6.000$.
- Aus I ergibt sich schließlich: $x_1 = \frac{5}{9}\cdot 18.000 = 10.000$

(Ist keine einfache Aufgabe, den Gauß-Algorithmus sollte man aber können!)