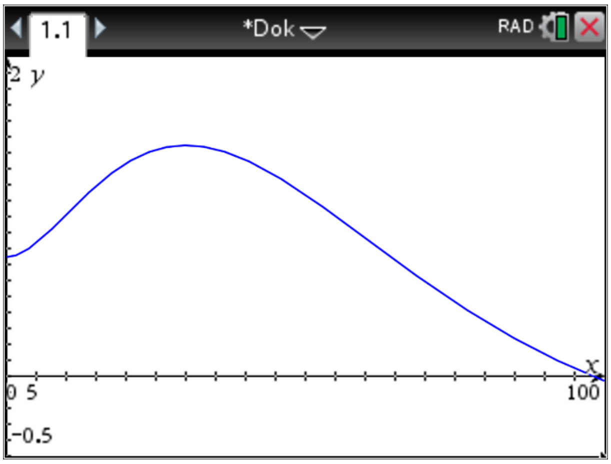
Tipps zu Vortrag VII (Arwa)

Tipp zur Lösung von b)

Jede Lösung von $f(x)=0{,}5$ bedeutet: Es gibt in Deutschland 0,5 Millionen Menschen, die x Jahre alt sind.

$f(x)=0{,}5 \Leftrightarrow \left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}5=0{,}5$ kann nicht direkt gelöst werden (Nullteilerfreiheit kann nicht verwendet werden, da auf keiner Seite Null und auf keiner Seite (nur) ein Produkt steht.)

Man muss mit nSolve arbeiten! Lässt man sich den Graphen von f mit dem GTR zeichnen, sieht man, dass der Graph nur im „rechten“ Teil in der Höhe 0,5 über der x-Achse verläuft, nämlich bei etwa $x=60$. Dies kann man als Näherungswert für nSolve gewählt werden:



$\text{nSolve}\left(\left(0.008x^2+0.08x+1.6\right)e^{-0.05x-0.25}-0.5=0.5,x=60\right)$ liefert die Lösung $x=73{,}5351$. Zu dieser Lösung wäre man auch gekommen, wenn man ohne weitere Überlegung den Näherungswert 0 genommen hätte, also

$$\text{nSolve}\left(\left(0.008x^2+0.08x+1.6\right)e^{-0.05x-0.25}-0.5=0.5,x=0\right)$$

eingegeben hätte.

Tipp zur Lösung von c)

Die Ableitungen berechnet man mit der Produkt- und der Kettenregel. Beispielhaft hier für die Berechnung von f'

Schritt 1. In $f(x)=\left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}5$ ist $-0{,}5$ eine additive Konstante. Diese fällt ersatzlos weg.

Schritt 2. Nach der Produktregel wird in $\left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$ zuerst der erste Faktor („die Klammer“) abgeleitet:

$$f'(x)=\left(0{,}016x+0{,}08\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}+\ldots$$

Schritt 3. Jetzt wird im Produkt der e-Term abgeleitet. Hierzu verwendet man den Spezialfall der Kettenregel: $f(x)=e^{g(x)} \Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$. Damit geht die Rechnung so weiter

$$f'(x)=\left(0{,}016x+0{,}08\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}+\left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)\cdot e^{-0{,}05x-0{,}25}\left(-0{,}05\right)$$

Schritt 4. Der e-Term wird ausgeklammert

$$f'(x) = e^{-0,05x-0,25} \cdot \left[(0,016x + 0,08) + (0,008x^2 + 0,08x + 1,6) \cdot (-0,05) \right]$$

Schritt 5. Die runden Klammern werden aufgelöst:

$$f'(x) = e^{-0,05x-0,25} \cdot \left[0,016x + 0,08 - 0,0004x^2 - 0,004x - 0,08 \right]$$

Schritt 6. In der eckigen Klammer wird zusammengefasst:

$$f'(x) = e^{-0,05x-0,25} \cdot \left[-0,0004x^2 + 0,012x \right]$$

Schritt 7. Man kann noch die Reihenfolge im Produkt vertauschen und statt der eckigen wieder eine runde Klammer schreiben:

$$f'(x) = (-0,0004x^2 + 0,012x)e^{-0,05x-0,25}$$

Berechnen der kritischen Stellen und der Wendestellen geschieht mithilfe der Nullteilerfreiheit, z.B.

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (-0,0004x^2 + 0,012x)e^{-0,05x-0,25} = 0$$
$$\Leftrightarrow -0,0004x^2 + 0,012x = 0 \text{ oder } e^{-0,05x-0,25} = 0$$

Wichtig: Der Term $e^{-0,05x-0,25}$ ist nie Null, da $e^{\cdots}$ niemals Null ist.

Bleibt $-0,0004x^2 + 0,012x = 0$ zu lösen. Am besten: x ausklammern und wieder die Nullteilerfreiheit verwenden:

$$-0,0004x^2 + 0,012x = 0$$
$$\Leftrightarrow x \cdot (-0,0004x + 0,012) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 30$$

Nachprüfen, das f negativ ist, falls $x \geq 99$: $f(99) = -0,015$ und der Graph kann nicht wieder „nach oben“ laufen, da es keinen Tiefpunkt mehr gibt.

Tipp zu e)

- stärkste Zunahme am LR-Wendepunkt; um die Höhe der stärksten Zunahme zu berechnen, setzt man die x-Koordinate des LR-Wendepunktes in f' ein.
- stärkste Abnahme am RL-Wendepunkt; um die Höhe der stärksten Abnahme zu berechnen, setzt man die x-Koordinate des RL-Wendepunktes in f' ein.

Tipp zu f)

Ableiten von F analog zur Lösung in c). In diesem Fall ist „$-0,5x$“ keine additive Konstante, muss also zu $-0,5$ abgeleitet werden.

Tipp zu g)

Laut Hinweis ist $\int_a^b f(x)dx$ die Anzahl der Menschen im Alter von a Jahren bis b Jahren, also

- Anzahl der Bewohner im erwerbstätigen Alter (also von 18 Jahren bis 65 Jahren) $\int_{18}^{65} f(x)dx$ (berechnen mithilfe der Stammfunktion in f))
- Anzahl der Bewohner im Rentenalter (also zwischen 66 und 98 Jahren - da nach c) $f(x)$ negativ ist, falls $x \geq 99$ ist, gibt es keine Bewohner, die älter als 98 Jahre sind!): $\int_{66}^{98} f(x)dx$ (berechnen mithilfe der Stammfunktion in f))

Tipp zu h)

Da kein Bewohner älter als 98 Jahre ist, ist die Gesamtanzahl aller Bewohner $\int_0^{98} f(x)dx$. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen teilt man die Anzahl der erwerbstätigen Bewohner durch die Anzahl aller Bewohner (Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsdefinition!)