Probevorträge zur mündlichen Abiturprüfung in Mathematik 2020

Abiturprüfung 2020

Probevortrag I: Laura Marmann

Thema: Politisch Verfolgte genießen Asylrecht

„Politisch Verfolgte genießen Asylrecht." So heißt es lapidar und eindeutig in Artikel 16 a, Absatz 1, des Grundgesetzes. Aufgrund der Verfolgung Andersdenkender fordern immer mehr schutzsuchende Menschen dieses Recht ein. In einer Modellrechnung einer karitativen Organisation wird davon ausgegangen, dass sich die Anzahl der schutzsuchenden Menschen, die eine Großstadt in einem Zeitraum von 4 Jahren aufnehmen wird, gemäß der Funktion f mit

$$f(x) = 25{,}2xe^{-0{,}1x} + 2{,}5$$

entwickelt. Hierbei ist x die Zeit in Monaten ($0 \le x \le 48$) und $f(x)$ die Höhe der Veränderung der Anzahl der aufzunehmenden Flüchtlinge je Monat.

a) *Berechnen Sie die Veränderung der Anzahl der schutzsuchenden Flüchtlinge nach 6 Monaten und nach 12 Monaten. Skizzieren Sie den Graphen von f mithilfe des GTR.*

b) Ein Politiker, der den Graphen der Funktion f sieht, behauptet, dass die Anzahl der Menschen, die die in der Großstadt Schutz suchen, nach rund 10 Monaten zu sinken beginnt.

   Beurteilen Sie diese Aussage.

c) *Untersuchen Sie die Funktion f mithilfe der Differentialrechnung auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.*

d) Angenommen, die Funktion f gibt auch in der Zeit nach 4 Jahren die monatliche Veränderung der Anzahl der in der Großstadt Schutz suchenden Flüchtlinge an.

   Ermitteln Sie, mit wie vielen zusätzlichen Schutzsuchenden dann zukünftig pro Monat zu rechnen ist.

e) *Weisen Sie nach, dass $F(x) = 2{,}5x - 252(x+10)e^{-0{,}1x}$ eine Stammfunktion zu f ist.*

f) Die Anzahl der Menschen, die zwischen Zeitpunkt a und Zeitpunkt b in der Großstadt Schutz suchen, kann im Modell der karitativen Organisation durch das Integral $\int_a^b f(x)dx$ berechnet werden.

   Berechnen Sie hiermit, wie viele Menschen sich in den ersten zwei Jahren in der Großstadt Schutz suchen.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag II: Johanna von Ambüren

Thema: Analyse der Entwicklung einer Seevögelpopulation

Eine Freundin von Ihnen überlegt, nach der Schule ein freiwilliges ökologisches Jahr auf der Hallig Langeness zu absolvieren. Langeness ist ein Rast- und Brutgebiet für zahlreiche Vogelarten wie z.B. Austernfischer, Rotschenkel oder Seeschwalben. FÖJler nehmen Brutvogelkartierungen und Untersuchungen zum Bruterfolg der Vögel vor, sie untersuchen

das Watt, die Salzwiesen, kontrollieren den Spülsaum und halten die naturkundlichen Entwicklungen auf der Hallig fest. Sie geben außerdem Gästen des Nationalpark-Seminarhauses Langeness, zu denen zum Beispiel Biologie-Leistungskurse oder Seminare von Universitäten gehören, in Führungen einen Einblick in die Natur des Wattenmeeres.

Ihre Freundin hat sich bereits mit dem Lebensrhythmus einiger Seevogelarten beschäftigt

Die Entwicklung der Population einer bestimmten Seevogelart in einem festgelegten Beobachtungsgebiet kann modellhaft so beschrieben werden: Die Population zerfällt in drei Altersklassen A_1, A_2, A_3, wobei zu A_1 die Jungvögel des ersten Lebensjahres, zu A_2 die Vögel des zweiten Lebensjahres und zu A_3 die Altvögel, die älter als zwei Jahre sind gehören. Die Überlebenswahrscheinlich ist in den ersten beiden Lebensjahren jeweils $0{,}6$. Altvögel überleben mit Wahrscheinlichkeit $0{,}8$. Die erste Brut findet im dritten Lebensjahr statt, der Bruterfolg wird mit $0{,}5$ Jungvögeln pro Elternvogel angenommen. Die rechtsstehende Matrix L beschreibt dieses Modell.

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \text{nach} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die aktuelle Zählung ergab 21.000 Vögel, davon 2.000 Jungvögel und 15.000 Altvögel.

a) *Berechnen Sie ohne Zuhilfenahme spezieller Funktionen des GTR die voraussichtliche Verteilung der Vögel nach einem, nach drei und nach 5 Jahren.*

b) *Berechnen Sie ohne Zuhilfenahme spezieller Funktionen des GTR die Verteilung der Vögel, die sich nach diesem Modell für das Vorjahr ergäbe.*

c) Fünf Elemente der Matrix L haben den Wert Null.

Erklären Sie für jedes dieser Elemente aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat.

d) Durch Schutzmaßnahmen soll – bei sonst gleichbleibenden Modellannahmen – der Bruterfolg der Altvögel auf einen Anteil $b > 0{,}5$ erhöht werden, sodass die Anzahl der Seevögel in den drei Altersklassen von Jahr zu Jahr gleich bleibt.

Begründen Sie, dass sich diese Verteilung als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0{,}6 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt. Führen Sie dann für dieses LGS den Gaußalgorithmus durch und begründen Sie, wie b *gewählt werden muss, damit dieses LGS neben der trivialen Lösung* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ *noch weitere Lösungen hat. Geben Sie schließlich eine Verteilung der Tiere auf die Altersklassen an, die mit den Jahren konstant bleibt.*

Abiturprüfung 2020

Probevortrag III: Anilu Meyer

Thema: Mitgliederversammlung

An der Jahreshauptversammlung von Krippe e.V. nehmen insgesamt 48 Mitglieder teil.

a) Für die inhaltliche Arbeit werden insgesamt 8 Arbeitskreise zu 6 Personen gebildet.

Erläutern Sie, wie man berechnen kann, auf wie viele Weisen dies möglich ist.

(Der tatsächliche Wert muss nicht ausgerechnet werden, er ist ungefähr $1{,}719 \cdot 10^{38}$)

b) Für das kommende Jahr sind in den Kitas der Elterninitiative 34 Betreuungsplätze frei, etwa 7 % aller Eltern, die die Zusage für einen Platz erhalten, nehmen diesen nicht an. Es werden deshalb 37 Zusagen erteilt.

Berechnen Sie ohne die Funktionen des GTR zu nutzen, die Wahrscheinlichkeiten, dass

- *genau ein Kind nicht kommt;*
- *genau zwei Kinder nicht kommen;*
- *alle Kinder kommen;*
- *die 34 Plätze für alle Kinder ausreichen.*

c) Für jedes Kind, das über die freien 34 Plätze hinaus betreut werden muss, monatliche Kosten von 250 € an. Die Zufallsvariable X gebe die hierdurch insgesamt im Monat anfallenden Kosten an.

Ermitteln Sie die Verteilung von X und berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$. Interpretieren Sie die Bedeutung von $E(X)$ im vorliegenden Sachzusammenhang.

d) Für die anstehenden Vorstandswahlen soll eine Gruppe von 12 Mitgliedern als Kandidaten bestimmt werden.

Berechnen Sie, auf wie viele Weisen die 12 Personen aus den 48 erschienenen Mitgliedern ausgewählt werden können.

e) Die 12 ausgewählten Kandidaten werden in Form einer Liste der Mitgliederversammlung zur Wahl vorgelegt.

Bestimmen Sie, auf wie viele Weisen die Listenplätze 1 bis 12 belegt werden können.

f) Eine Gruppe von 7 Mitgliedern ist mit der Arbeit des gegenwärtigen Vorsitzenden nicht einverstanden und beantragt, diesen nicht zu entlasten.

Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dem Antrag stattgegeben wird, wenn man davon ausgeht, dass die übrigen 41 Mitglieder zu jeweils etwa 50 % für oder gegen den Antrag stimmen werden, und für die Zustimmung eine absolute Mehrheit der Teilnehmer notwendig ist.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag IV: Paula Gruß

Thema: Der Server von Krippe e.V.

In der Regel ab Ostern beginnen viele Eltern, sich über mögliche KiTas für ihre Kinder zu informieren. Dies geschieht heute auch mehr und mehr online. Im vergangenen Jahr ist der Sever von Krippe e.V. hierbei an seine Leistungsgrenze gestoßen. Krippe e.V. beauftragte einen Experten, diese Situation zu analysieren. Hierzu hat er ein mathematisches Modell entwickelt, das die Anzahl der Aufrufe der Webseiten von Krippe e.V. analysiert.

Dieses geht für den Zeitraum von 10.00 Uhr bis 22.00 Uhr davon aus, dass die Anzahl der Webseitenzugriffe zum Zeitpunkt x (x gibt die Zeit in Stunden ab 10.00 Uhr an) näherungsweise mit der durch

$$f(x) = 59{,}1x^2e^{-0{,}5x} + 10$$

gegebenen Funktion beschrieben werden kann.

a) *Berechnen Sie die Anzahl der Zugriffe auf die Webseiten von Krippe e.V. um 11.30 Uhr und um 14.45 Uhr.*

b) *Untersuchen Sie die Funktion f auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte und interpretieren Sie die Werte im Sachproblem.*

c) *Weisen Sie nach, dass* durch $F(x) = -118{,}2\left(x^2 + 4x + 8\right)e^{-0{,}5x} + 10x$ *eine Stammfunktion zu f gegeben ist.*

d) *Erläutern Sie, welche Bedeutung die Werte $\int_0^{12} f(x)dx$ und $\frac{1}{12}\int_0^{12} f(x)dx$ haben und berechnen Sie diese Werte.*

e) Aus dem Protokoll des Servers geht hervor, dass er bei einem Ausfall im vergangenen Jahr um 13.15 Uhr noch erreichbar war, er jedoch in den darauffolgenden 20 Minuten ausfiel, als 136 gleichzeitige Zugriffe vorlagen.

Berechnen Sie mithilfe des GTR, um wieviel Uhr der Sever ausfiel.

f) An einem anderen Tag fiel der Server aus, als die Anzahl der Zugriffe erstmals um 52 Zugriffe pro Stunde stieg.

Berechnen Sie auch hier mithilfe des GTR, um wieviel Uhr das war.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag V: Juliane Glowienka

Thema: Spenden für die KiTa

Um die Ausstattung der KiTa weiter verbessern zu können, bitten Mitarbeiter der KiTa ÖMMES UND OIMEL jedes Jahr die Bewohner im Stadtviertel in einer Spendenaktion um Geldspenden. In den vergangenen Jahren waren jeweils 35 % der Befragten bereit, etwas zu geben. Es wird vermutet, dass dies auch bei der diesjährigen Spendenaktion so sein wird.

a) *Berechnen Sie die kleinste Anzahl an Personen, die zufällig ausgewählt und nach einer Spende gefragt werden müssen, damit mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens einer bereit ist, eine Spende zu geben.*

In diesem Jahr werden zunächst 300 zufällig ausgewählte Bewohner des Viertels nach Spenden gefragt.

b) *Berechnen Sie, mit wie vielen Spendern dem Erwartungswert nach gerechnet werden kann.*

c) Es stellte sich heraus, dass von den 300 befragten Personen sogar 115 Personen bereit waren, eine Spende zu geben.

Untersuchen Sie, ob hieraus bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}1$ geschlossen werden kann, dass mehr als 35 % der Bewohner des Stadtviertels bereit sind, für die KiTa zu spenden.

Hinweis. Erläutern Sie, dass die Hypothese $H_0 : p \leq 0{,}35$ getestet werden muss, und bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spender einen Betrag X spendet, der zwischen a und b Euro liegt, kann im Fall $0 \leq a < b \leq 100$ durch

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \text{ mit } f(x) = \frac{0{,}16}{(1+0{,}15x)^2}$$

berechnet werden.

d) *Erläutern Sie wie man nachweisen kann, dass durch $F(x) = -\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15x}$ eine Stammfunktion zu f gegeben ist.*

e) *Weisen Sie nach, dass $P(X \leq 100) = 1$ ist und interpretieren Sie die Bedeutung dieses Resultats im Sachzusammenhang.*

f) *Stellen Sie jeweils kurz dar, wie die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Spendenbetrag*

- *maximal 5 €*
- *zwischen 4 € und 10 €*
- *mehr als 20 €*

beträgt, berechnet werden, und geben Sie dann diese Werte an.

Der zu erwartende Spendenbetrag ist $E(X)=\int_0^{100} g(x)dx$ mit $g(x)=x\cdot f(x)$.

g) *Interpretieren Sie $E(X)$ geometrisch in Bezug auf den Graphen der Funktion g.*

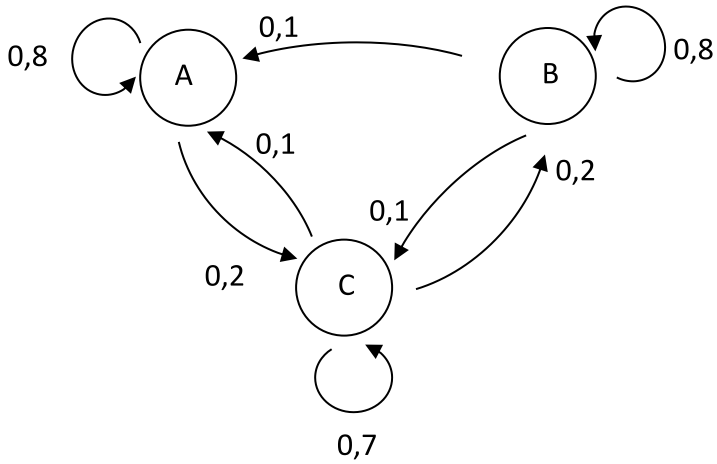
h) *Berechnen Sie $E(X)$ mithilfe des GTR und geben Sie die Bedeutung dieses Wertes im Sachproblem an.*

Abiturprüfung 2020

Probevortrag VI: Michelle Bach

Thema: Kaffeesorten

Im Team-Raum der KiTa Ömmes und Oimel steht immer eine warme Kanne Kaffee bereit. Je nachdem, welches Teammitglied die Kaffeebohnen einkauft, ist er von einer der drei Röstereien A, B oder C. Eine Marktstudie hat gezeigt, dass Kunden gelegentlich zwischen den drei Röstereien wechseln. Ihr monatliches Wechselverhalten, das auf lange Zeit stabil zu bleiben scheint, wurde in der Studie durch die folgende Grafik visualisiert:



a) *Beschreiben Sie das Wechselverhalten durch eine Übergangsmatrix M.*

Im aktuellen Monat haben 370 Tausend Kunden Kaffee von A, 220 Tausend Kunden Kaffee von B und 310 Tausend Kunden Kaffee von C gekauft.

b) *Berechnen Sie die Anzahl der Kunden der drei Röstereien im nächsten Monat.*

c) *Erläutern Sie, wie die Matrix M^2 händisch berechnet wird. Geben Sie mithilfe des GTR diese Matrix an und interpretieren Sie den Eintrag in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie den Eintrag in der dritten Zeile und dritten Spalte im Sachzusammenhang.*

d) *Erläutern Sie, wie ausgehend von den oben genannten aktuellen Anzahlen der Kunden der drei Röstereien die Verteilung der Kundenzahlen auf die Röstereien für den vergangenen Monat händisch berechnet wird. Berechnen Sie dann mithilfe des GTR diese Verteilung.*

e) *Erläutern Sie, wie Sie auf der Basis von insgesamt 900 Tausend Kunden eine Verteilung der Kunden auf die drei Röstereien, die sich im Folgemonat nicht ändert, händisch berechnen. Berechnen Sie dann mithilfe des GTR diese Verteilung.*

f) Bei der angegebenen Matrix M handelt es sich um eine stochastische Matrix. *Erläutern Sie zunächst den Begriff „stochastische Matrix" und diskutieren Sie kritisch, ob die dahinter liegende Modellannahme für das vorliegende Sachproblem angemessen ist.*

Abiturprüfung 2020

Probevortrag VII: Arwa Kanaan

Thema: Bevölkerungsstruktur in Deutschland

Die Anzahl der Bewohner der Bundesrepublik Deutschland im Alter von x Jahren kann in grober Näherung durch

$$f(x)=\left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}5$$

berechnet werden. Dabei wird $f(x)$ in Millionen gemessen.

a) *Berechnen Sie die Anzahl der Bewohner Deutschlands im Alter von 18 Jahren.*

b) *Lösen Sie die Gleichung $f(x)=0{,}5$ und interpretieren Sie die gefundenen Werte im Sachzusammenhang.*

c) *Bestimmen Sie die Extrempunkte von f und überprüfen Sie, dass $f(x)$ negativ ist, falls $x\geq 99$ ist.*

Zur Kontrolle: $f'(x)=\left(-0{,}0004x^2+0{,}012x\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$

$$f''(x)=\left(0{,}00002x^2-0{,}0014x+0{,}012\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$$

d) *Interpretieren Sie die Ergebnisse aus c) im vorliegenden Sachzusammenhang.*

e) *Bestimmen Sie, bei welchem Alter die Anzahl der Bewohner am stärksten zu- und bei welchem Alter sie am stärksten abnimmt. Berechnen Sie auch die Höhe des stärksten Wachstums und der stärksten Abnahme.*

f) *Weisen Sie nach, dass durch $F(x)=-\left(0{,}16x^2+8x+192\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}5x$ eine Stammfunktion zu f gegeben ist.*

g) Die Finanzausstattung der gesetzlichen Rentenversicherung ist ständiges Thema in der öffentlichen Debatte. Eine Kennziffer hierfür ist, wie viele Bewohner im erwerbstätigen Alter (18 bis 65 Jahre) auf einen Bewohner im Rentenalter (Alter ab 66 Jahren) entfallen.

Berechnen Sie die Anzahl der Bewohner im erwerbstätigen Alter und die Anzahl der Bewohner im Rentenalter. Bestimmen Sie dann die angesprochene Kennziffer

Hinweis: Die Anzahl aller Bewohner im Alter von a bis b Jahren erhält man durch Integration der Funktion f von a bis b.

h) *Weisen Sie nach, dass die die Bevölkerungszahl in Deutschland ungefähr 85,96 Millionen beträgt.*

Bestimmen Sie dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig angetroffener Bewohner Deutschlands im erwerbstätigen Alter ist.

Abiturprüfung Mathematik 2020

Probevortrag VIII: Maren True

Thema: Osterhasen

Ein Supermarkt startet vor Ostern eine Werbeaktion, bei der die Kunden Schoko-Osterhasen gewinnen können. Das Gewinnspiel ist wie folgt konzipiert: In einer Urne sind 22 rote und 10 schwarze Kugeln, die sich nur in der Farbe unterscheiden. Der Kunde zieht blind nacheinander drei Kugeln. Er gewinnt, wenn er genau zwei rote und eine schwarze Kugel (in beliebiger Reihenfolge) zieht. Dabei ist ihm freigestellt, ob er mit oder ohne Zurücklegen zieht. Er muss dies nur vor seinem ersten Zug festlegen.

a) *Stellen Sie die Situation beim Ziehen ohne Zurücklegen in einem Baumdiagramm dar und erläutern Sie, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit in diesem Fall $p = 0{,}47$ ist. Bestimmen Sie außerdem die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Ziehen mit Zurücklegen und entscheiden Sie, ob es günstiger ist, mit oder ohne Zurücklegen zu ziehen.*

b) Ein anderer Kunde zieht ohne Zurücklegen und zieht als erstes eine rote Kugel. Er wertet dies positiv: „Das ist ja schon fast die halbe Miete.“ *Untersuchen Sie, ob sein Optimismus gerechtfertigt ist.*

c) *Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit, bei Ziehen ohne Zurücklegen zu gewinnen* ***und*** *im ersten Zug eine rote Kugel gezogen zu haben, $77/248$ beträgt. Verwenden Sie dies, um mithilfe eines geeigneten Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass bei Ziehen ohne zurücklegen ein Gewinner im ersten Zug eine rote Kugel gezogen hat.*
Hinweis. Gesucht ist hier die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\text{Gewinn}}(\text{erste Kugel rot})$.

d) Von den zu gewinnenden Osterhasen sind erfahrungsgemäß 8 % aus dem vergangenen Jahr, sodass deren Qualität schlechter ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 Gewinnern genau 8 bzw. mehr als 8 einen alten Osterhasen bekommen.

e) Die Leitung des Supermarkts möchte keinen Imageverlust durch das Abgeben zu vieler alter Osterhasen riskieren und will das Gewinnspiel abbrechen, wenn mehr als 8 % der Osterhasen aus dem Vorjahr stammen. Hierzu lässt sie von den vorhandenen Osterhasen eine Stichprobe von 125 Stück untersuchen, um einen einseitigen Hypothesentest durchzuführen.

Entscheiden Sie sich begründet, welche der beiden möglichen Nullhypothesen $H_0: p \leq 0{,}08$ und $H_0: p \geq 0{,}08$ dem Test zugrunde liegen sollte. Erläutern Sie jeweils die Bedeutung eines Fehlers erster Art.

f) *Bestimmen Sie für das Testen der Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}08$ den Ablehnungsbereich auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$ und formulieren Sie die Entscheidungsregel.*

Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Leitung des Supermarktes aufgrund der Entscheidungsregel das Glücksspiel fortsetzt, obwohl 11 % der Osterhasen alt sind.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag IX: Marie Schmitz

Thema: Make Alabama Great Again!

Die Firma ALABAMA INSTRUMENTS stellt Taschenrechner in Massenproduktion her. Im Rahmen der Initiative *Make Alabama Great Again!* soll die Qualität der Produktion verbessert werden. Ein Werk in Mexiko steht im Verdacht, besonders viele defekte Taschenrechner zu produzieren. Die Firmenleitung plant, das Werk zu schließen, wenn mehr als 5 % der dort produzierten Geräte defekt sind. Um dies zu prüfen, werden aus der dortigen Produktion 500 Geräte zufällig entnommen und überprüft.

a) *Geben Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % an, wie viele Geräte davon mindestens fehlerhaft sein müssen, damit dieser Vermutung zugestimmt werden kann.*

b) Die Werksleitung in Mexiko will ihrerseits mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % belegen, dass weniger als 3 % der produzierten Geräte defekt sind.

Geben Sie an, wie viele der 500 Geräte maximal einen Fehler haben dürfen, damit dieser Hypothese bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % zugestimmt werden kann.

c) Angenommen, es sind genau 4 % der in Mexiko produzierten Taschenrechner defekt.

Berechnen Sie, wie viele Taschenrechner man der Produktion mindestens zufällig entnehmen muss, damit darunter mit Wahrscheinlichkeit 0,99 mindestens ein defektes Gerät ist.

Für die Zufallsvariable X, die Anzahl der Tage angibt, bis ein Taschenrechner von ALABAMA INSTRUMENTS kaputt geht, gilt

- $P(X \leq t) = \int_0^t 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001 \cdot x} dx$, wobei $t \geq 0$ ist, sowie
- $P(s \leq X \leq t) = \int_s^t 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001 \cdot x} dx$, wobei $0 \leq s \leq t$ ist.

(Eine derartige Zufallsvariable heißt auch EXPONENTIALVERTEILT MIT PARAMETER $0{,}001$.)

d) *Weisen Sie nach dass durch* $F(x) = -e^{-0{,}001x}$ *eine Stammfunktion zu* $f(x) = 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x}$ *gegeben ist.*

e) *Berechnen Sie* $\int_{50}^{150} 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x} dx$ *und interpretieren Sie diesen Wert im vorliegenden Sachkontext.*

f) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taschenrechner höchstens 365 Tage funktioniert.*

g) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taschenrechner mehr als 5 Jahre funktioniert.*

Für den Erwartungswert *von* X *gilt* $E(X) = \int_0^{\infty} 0{,}001 \cdot x e^{-0{,}001x} dx$

h) *Weisen Sie nach, dass* $G(x) = -(1000 + x)e^{-0,001x}$ eine Stammfunktion zur Funktion $f(x) = 0,001 \cdot xe^{-0,001x}$ ist.

i) Es gilt $E(X) = 1000$.

Überlegen Sie, wie Sie dies berechnen können, und interpretieren Sie dann den Erwartungswert im Sachzusammenhang.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag X: Selina Reuter

Thema: Anmeldezahlen eines beruflichen Gymnasiums

Der Abteilungsleiter eines zweizügigen Beruflichen Gymnasiums geht davon aus, dass von allen ursprünglich in die Jahrgangsstufe 11 aufgenommenen Bewerbern etwa 4 % am ersten Schultag nicht erscheinen. Für das kommende Schuljahr erhalten 64 Bewerber eine Zusage. es soll zunächst davon ausgegangen werden, dass wie vom Abteilungsleiter vermutet 4 % der Bewerberinnen und Bewerber mit Zusage am ersten Schultag nicht erscheinen werden.

a) *Modellieren Sie Anzahl der nicht erscheinenden Schülerinnen und Schüler in einer geeigneten Bernoulli-Kette S und berechnen Sie deren Mittelwert und Standardabweichung. Interpretieren Sie die Bedeutung von μ in der vorliegenden Situation.*

b) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 64 Bewerbern*

- *genau 60 Bewerber*
- *mehr als 60 Bewerber*
- *weniger als 55 Bewerber*

am ersten Schultag erscheinen werden.

c) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle am ersten Schultag erscheinenden Bewerber in zwei Klassen mit je 30 Schülerinnen und Schülern untergebracht werden können.*

Sind Schulplätze am Anfang des Schuljahres nicht besetzt, muss die Stadt als Trägerin des Berufskollegs an das Land eine Strafzahlung abführen. Die Erträge aus den Strafzahlungen aller Schulen des Landes sollen später den Schulen zur Verfügung gestellt werden, die ihre Kapazitäten voll ausgeschöpft haben. Folgende Beträge sind bei 60 zu besetzenden Schulplätzen für das Berufliche Gymnasium abzuführen:

Anzahl der besetzten Plätze	Höhe der Zahlung ans Land
60 oder mehr	keine Zahlung
59	500 €
58	1.000 €
57	2.500 €
56	5.000 €
weniger als 56	8.000 €

Die Zufallsvariable X gebe die Höhe der Strafzahlung an.

d) *Stellen Sie die Verteilung von X auf und berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$. Interpretieren Sie die Bedeutung von $E(X)$ im Sachzusammenhang.*

Die Schulleiterin bezweifelt die Hypothese des Abteilungsleiters, dass (mindestens) 4 % am ersten Schultag nicht erscheinen, da am ersten Schultag nur ein Bewerber nicht auftaucht.

e) *Entscheiden Sie, ob dies bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von* $\alpha = 0{,}1$ *für die Vermutung der Schulleiterin spricht, dass weniger als 4 % der Bewerber am ersten Schultag nicht erscheinen.*

Hinweis. Begründen Sie, dass sie die Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}04$ *getestet werden sollte, und bestimmen Sie die Entscheidungsregel.*

f) Der Abteilungsleiter möchte nachweisen, dass seine Hypothese „mindestens 4 % erscheinen am ersten Schultag nicht" richtig ist.

Untersuchen Sie, ob seine Vermutung durch das vorliegende Ergebnis des ersten Schultages bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % gestützt wird.

Hinweis. Die speziellen Funktionen des GTR dürfen durchgehend verwendet werden.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag XI: Emelie Puzicha

Thema: Randomized Response Technik

Hat die Gefahr einer HIV-Infektion bei Teenagern zu einem verantwortungsvollem Sexualverhalten geführt? Um dies zu untersuchen, befragt ein Forschungsinstitut Jugendliche, ob sie in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatten. Da anzunehmen ist, dass die Wenigsten darüber offen sprechen wollen, wird die **Randomized Response Technik** angewendet: Der/dem Befragten wird eine Urne übergeben, die die folgenden drei Karten enthält:

Die/der Befragte wird dann aufgefordert, eine der Karten zufällig aus der Urne zu ziehen, ohne sie dem Interviewer zu zeigen, und dann die Frage auf der Karte *wahrheitsgemäß* zu beantworten. Der Interviewer notiert nur die Antwort JA bzw. NEIN. Er weiß nicht, auf welche Frage geantwortet wurde.

a) Nach Abschluss der Interviews stellt man fest, dass in 36,9 % aller Fälle die Antwort JA notiert wurde. Ein unbekannter Anteil der Befragten hat die Frage auf der rechten Karte mit JA beantwortet. Dieser Anteil werde mit p bezeichnet.

Es kann davon ausgegangen werden, dass jede der drei Karten in etwa $1/3$ aller Fälle gezogen wurde.

Stellen Sie die Situation als zweistufiges Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar: Stufe 1 = Ziehen der Karte, Stufe 2 = Beantworten der Frage auf der Karte. Erläutern Sie anhand des Baumdiagramms, dass p die Gleichung

$$\frac{1}{3}+\frac{p}{3}=0{,}369$$

erfüllen muss, und berechnen Sie p.

b) Aufgrund der Interviews geht das Forschungsinstitut davon aus, dass 10,7 % aller Jugendlichen in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatten, dass also $p=0{,}107$ ist.

Erläutern Sie, dass dann die Wahrscheinlichkeit, in einer Gruppe von n Jugendlichen mindestens einen zu finden, der in den letzten 6 Monate ungeschützten Geschlechtsverkehr *mit verschiedenen Partnern hatte, mit dem Term $1-0{,}893^n$ berechnet werden kann. Ermitteln Sie hiermit, wie viele Jugendliche man befragen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 mindestens einen solchen zu finden.*

c) Eine gymnasiale Oberstufe wird im Moment von 169 jugendlichen Schülerinnen und Schülern besucht.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass zwischen 14 und 20 von diesen in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatten.

d) Im Rahmen eines Projekts aller Biologie-LKs des Gymnasiums diskutieren die Schülerinnen und Schüler, ob die vom Forschungsinstitut angegebene Wahrscheinlichkeit $p=0{,}107$ stimmt. Sie vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit kleiner ist, und wollen dies mit einem einseitigen Hypothesentest belegen.

Es werden 95 jugendliche Schülerinnen und Schüler der der Oberstufe zufällig ausgewählt. Jeder erhält einen Zettel, auf dem sie oder er anonym ankreuzen kann, ob sie oder er in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatte oder nicht.

Begründen Sie, dass $H_0: p \geq 0{,}107$ die geeignete Nullhypothese ist, und bestimmen Sie auf dem Signifikanzniveau $\alpha=0{,}1$ die Entscheidungsregel für den Hypothesentest.

e) Eine ortsansässige Zeitung möchte einen Artikel über das unmoralische Verhalten der heutigen Jugend veröffentlichen. Der verantwortliche Journalist erlangt Kenntnis von der Befragung des Biologie-LKs.

Untersuchen Sie, welches Ergebnis die Befragung liefern muss, damit der Journalist bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % darauf schließen kann, dass die Wahrscheinlichkeit für ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern höher ist als 10,7 %.

f) Bei der Auswertung der Befragung stellt sich heraus, dass 7 Jugendliche die gestellte Frage bejaht haben.

Beurteilen Sie, ob das Ergebnis auf dem Signifikanzniveau 10 % die Vermutung der Schülerinnen und Schüler oder die Vermutung des Journalisten stützt.

Hinweis. Die speziellen Funktionen des GTR dürfen durchgehend verwendet werden.