Probevorträge zur mündlichen Abiturprüfung in Mathematik 2020

Burghardt – RWB – 2020

Abiturprüfung 2020

Probevortrag I: Laura Marmann

Thema: Politisch Verfolgte genießen Asylrecht

„Politisch Verfolgte genießen Asylrecht.“ So heißt es lapidar und eindeutig in Artikel 16 a, Absatz 1, des Grundgesetzes. Aufgrund der Verfolgung Andersdenkender fordern immer mehr schutzsuchende Menschen dieses Recht ein. In einer Modellrechnung einer karitativen Organisation wird davon ausgegangen, dass sich die Anzahl der schutzsuchenden Menschen, die eine Großstadt in einem Zeitraum von 4 Jahren aufnehmen wird, gemäß der Funktion f mit

$$f(x) = 25{,}2xe^{-0{,}1x} + 2{,}5$$

entwickelt. Hierbei ist x die Zeit in Monaten ($0 \leq x \leq 48$) und $f(x)$ die Höhe der Veränderung der Anzahl der aufzunehmenden Flüchtlinge je Monat.

a) *Berechnen Sie die Veränderung der Anzahl der schutzsuchenden Flüchtlinge nach 6 Monaten und nach 12 Monaten. Skizzieren Sie den Graphen von f mithilfe des GTR.*

b) Ein Politiker, der den Graphen der Funktion f sieht, behauptet, dass die Anzahl der Menschen, die die in der Großstadt Schutz suchen, nach rund 10 Monaten zu sinken beginnt.

   Beurteilen Sie diese Aussage.

c) *Untersuchen Sie die Funktion f mithilfe der Differentialrechnung auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.*

d) Angenommen, die Funktion f gibt auch in der Zeit nach 4 Jahren die monatliche Veränderung der Anzahl der in der Großstadt Schutz suchenden Flüchtlinge an.

   Ermitteln Sie, mit wie vielen zusätzlichen Schutzsuchenden dann zukünftig pro Monat zu rechnen ist.

e) *Weisen Sie nach, dass $F(x) = 2{,}5x - 252(x+10)e^{-0{,}1x}$ eine Stammfunktion zu f ist.*

f) Die Anzahl der Menschen, die zwischen Zeitpunkt a und Zeitpunkt b in der Großstadt Schutz suchen, kann im Modell der karitativen Organisation durch das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet werden.

   Berechnen Sie hiermit, wie viele Menschen sich in den ersten zwei Jahren in der Großstadt Schutz suchen.

Lösung Vortrag I

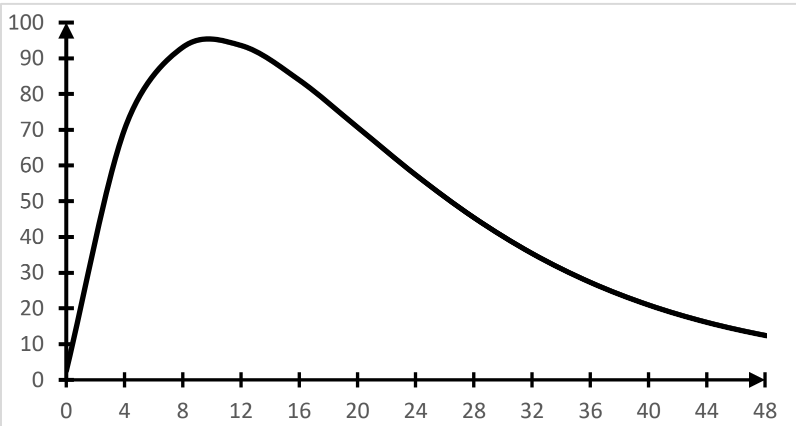
a) - Veränderung der Anzahl der schutzsuchenden Flüchtlinge nach 6 Monaten: $f(6)=85{,}48\approx 85$ Menschen
   - Veränderung der Anzahl der schutzsuchenden Flüchtlinge nach 12 Monaten: $f(12)=93{,}58\approx 94$ Menschen.

   Wertetabelle:

x	0	4	8	12	16	20
$f(x)$	2,5	70,07	93,08	93,58	83,9	70,71

x	24	28	32	36	40	44	48
$f(x)$	57,37	45,41	35,37	27,29	20,96	16,11	12,45

   Graph:



b) Dies ist falsch. Nach etwa 10 Monaten verringert sich die monatliche Zunahme. Die Anzahl der Schutzsuchenden nimmt weiterhin zu, aber weniger stark als in den ersten 10 Monaten.

c) Berechnen der Ableitungen mithilfe der Produktregel

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)\Rightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$$

in Verbindung mit der speziellen Kettenregel $f(x)=e^{g(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$:

- $f'(x)=25{,}2\cdot e^{-0{,}1x}+25{,}2xe^{-0{,}1x}\cdot(-0{,}1)=(-2{,}52x+25{,}2)\cdot e^{-0{,}1x}$
- $f''(x)=(-2{,}52)\cdot e^{-0{,}1x}+(-2{,}52x+25{,}2)\cdot e^{-0{,}1x}\cdot(-0{,}1)=(0{,}252x-5{,}04)\cdot e^{-0{,}1x}$
- $f'''(x)=0{,}252\cdot e^{-0{,}1x}+(0{,}252x-5{,}04)\cdot e^{-0{,}1x}\cdot(-0{,}1)$
  $=(0{,}252+(0{,}252x-5{,}04)\cdot(-0{,}1))\cdot e^{-0{,}1x}=(-0{,}0252x+0{,}756)\cdot e^{-0{,}1x}$

Berechnen der kritischen Stellen:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -2{,}52x+25{,}2=0\Leftrightarrow x=10$$

Überprüfen eines hinreichenden Kriteriums:

$f''(10) = -0{,}927 < 0 \Rightarrow \text{HP}(10|95{,}206)$

Berechnen der Nullstellen der zweiten Ableitung:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}252x - 5{,}04 = 0 \Leftrightarrow x = 20$

Überprüfen eines hinreichenden Kriteriums:

$f'''(20) = 0{,}034 > 0 \Rightarrow \text{RLW}(20|70{,}709),\ f'(20) = -3{,}41$

Für die Interpretation der Punkte werden ggf. noch die Randwerte benötigt:

- $f(0) = 2{,}5;\ f'(0) = 25{,}2$
- $f(48) = 12{,}455;\ f'(48) = -0{,}788$

Zusammenfassende Interpretation der Werte:

- Größte Anzahl an neu Hinzugekommenen bei $x = 10$, also nach 10 Monaten mit $95{,}206 \approx 95$ Menschen
- Geringste Anzahl an neu Hinzugekommenen bei $x = 0$, also direkt zu Beginn des Zeitraums mit $95{,}206 \approx 95$ Menschen
- Größte Zunahme der Anzahl an neu Hinzugekommenen bei $x = 0$, also direkt zu Beginn des Zeitraumes mit $25{,}2$ neu Hinzugekommenen pro Monat.
- Größte Abnahme der Anzahl an neu Hinzugekommenen bei $x = 20$, also nach 20 Monaten mit $3{,}42$ neu Hinzugekommenen pro Monat.

d) Setzt man in $f(x)$ für x immer größere Werte ein, so stellt man fest, dass für große Werte von x $f(x) \approx 2{,}5$ ist. Es ist also monatlich mit ca. 2,5 neu Hinzukommenden zu rechnen.

e) Nachweis durch Berechnen der Ableitung mithilfe der Produktregel

$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

in Verbindung mit der speziellen Kettenregel $f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2{,}5 - 252\left(1 \cdot e^{-0{,}1x} + (x+10)e^{-0{,}1x} \cdot (-0{,}1)\right) \\ &= 2{,}5 - 252\left(1 + (x+10) \cdot (-0{,}1)\right) \cdot e^{-0{,}1x} = 2{,}5 - 252\left(1 + (x+10) \cdot (-0{,}1)\right) \cdot e^{-0{,}1x} \\ &= 2{,}5 - 252(-0{,}1x) \cdot e^{-0{,}1x} = 25{,}2x \cdot e^{-0{,}1x} + 2{,}5 = f(x) \end{aligned}$$

Abiturprüfung 2020

Probevortrag II: Johanna von Ambüren

Thema: Analyse der Entwicklung einer Seevögelpopulation

Eine Freundin von Ihnen überlegt, nach der Schule ein freiwilliges ökologisches Jahr auf der Hallig Langeness zu absolvieren. Langeness ist ein Rast- und Brutgebiet für zahlreiche Vogelarten wie z.B. Austernfischer, Rotschenkel oder Seeschwalben. FÖJler nehmen Brutvogelkartierungen und Untersuchungen zum Bruterfolg der Vögel vor, sie untersuchen das Watt, die Salzwiesen, kontrollieren den Spülsaum und halten die naturkundlichen Entwicklungen auf der Hallig fest. Sie geben außerdem Gästen des Nationalpark-Seminarhauses Langeness, zu denen zum Beispiel Biologie-Leistungskurse oder Seminare von Universitäten gehören, in Führungen einen Einblick in die Natur des Wattenmeeres.

Ihre Freundin hat sich bereits mit dem Lebensrhythmus einiger Seevogelarten beschäftigt

Die Entwicklung der Population einer bestimmten Seevogelart in einem festgelegten Beobachtungsgebiet kann modellhaft so beschrieben werden: Die Population zerfällt in drei Altersklassen A_1, A_2, A_3, wobei zu A_1 die Jungvögel des ersten Lebensjahres, zu A_2 die Vögel des zweiten Lebensjahres und zu A_3 die Altvögel, die älter als zwei Jahre sind gehören. Die Überlebenswahrscheinlich ist in den ersten beiden Lebensjahren jeweils $0{,}6$. Altvögel überleben mit Wahrscheinlichkeit $0{,}8$. Die erste Brut findet im dritten Lebensjahr statt, der Bruterfolg wird mit $0{,}5$ Jungvögeln pro Elternvogel angenommen. Die rechtsstehende Matrix L beschreibt dieses Modell.

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \text{nach} \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die aktuelle Zählung ergab 21.000 Vögel, davon 2.000 Jungvögel und 15.000 Altvögel.

a) *Berechnen Sie ohne Zuhilfenahme spezieller Funktionen des GTR die voraussichtliche Verteilung der Vögel nach einem, nach drei und nach 5 Jahren.*

b) *Berechnen Sie ohne Zuhilfenahme spezieller Funktionen des GTR die Verteilung der Vögel, die sich nach diesem Modell für das Vorjahr ergäbe.*

c) Fünf Elemente der Matrix L haben den Wert Null.

Erklären Sie für jedes dieser Elemente aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat.

d) Durch Schutzmaßnahmen soll – bei sonst gleichbleibenden Modellannahmen – der Bruterfolg der Altvögel auf einen Anteil $b > 0{,}5$ erhöht werden, sodass die Anzahl der Seevögel in den drei Altersklassen von Jahr zu Jahr gleichbleibt.

Begründen Sie, dass sich diese Verteilung als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0{,}6 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt. Führen Sie dann für dieses LGS den Gaußalgorithmus durch und begründen Sie, wie b *gewählt werden muss, damit dieses LGS neben der trivialen Lösung* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ *noch weitere Lösungen hat. Geben Sie schließlich eine Verteilung der Tiere auf die Altersklassen an, die mit den Jahren konstant bleibt.*

Lösung Vortrag II

Die aktuelle Zählung ergab 21.000 Vögel, davon 2.000 Jungvögel und 15.000 Altvögel.

a)

- Verteilung nach einem Jahr: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.000 \\ 4.000 \\ 15.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.500 \\ 1.200 \\ 14.400 \end{pmatrix}$, also 7.500 Jungvögel, 4.000 Vögel des zweiten Jahres und 14.400 Altvögel
- Verteilung nach zwei Jahren: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7.500 \\ 1.200 \\ 14.400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.200 \\ 4.500 \\ 12.240 \end{pmatrix}$
- Verteilung nach drei Jahren: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7.200 \\ 4.500 \\ 12.240 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.120 \\ 4.320 \\ 12.492 \end{pmatrix}$, also 6.120 Jungvögel, 4.320 Vögel des zweiten Jahres und 21.492 Altvögel
-
- Verteilung nach vier Jahren: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6.120 \\ 4.320 \\ 12.492 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.246 \\ 3.672 \\ 12.585{,}6 \end{pmatrix}$
- Verteilung nach fünf Jahren: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6.246 \\ 3.672 \\ 12.585{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.292{,}8 \\ 3.747{,}6 \\ 12.271{,}68 \end{pmatrix}$, also $6.292{,}8 \approx 6.293$ Jungvögel, $3.747{,}6 \approx 3.748$ Vögel des zweiten Jahres und $12.271{,}68 \approx 12.272$ Altvögel.

b) Für die unbekannte Verteilung vor einem Jahr, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 4.000 \\ 15.000 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcccl} \text{I} & & & 0{,}5 \cdot x_3 & = & 2.000 \\ \text{II} & 0{,}6x_1 & & & = & 4.000 \\ \text{III} & & 0{,}6x_2 & + \; 0{,}8x_3 & = & 15.000 \end{array}$$

Dies ist leicht (auch ohne Gauß-Algorithmus zu lösen:

- Aus Gleichung I ergibt sich $x_3 = \dfrac{2.000}{0{,}5} = 4.000$

- Aus Gleichung II ergibt sich $x_1 = \frac{4.000}{0,6} = 6.666\frac{2}{3} \approx 6.667$
- Aus Gleichung III folgt dann $0,6x_2 + 0,8 \cdot 4.000 = 15.000 \Leftrightarrow x_2 = 19.666\frac{2}{3} \approx 19.667$

c)
- Von den Jungtieren bleibt keines und erzeugt keines ein Jungtier und keines wird ein Alttier.
- Die Vögel des zweiten Jahres erzeugen keine Jungtiere und keines bleibt ein Vogel des zweiten Jahres.
- Die Alttiere werden keine Jungtiere.

d) Der Bruterfolg der Altvögel wird dargestellt durch den Wert in der 1. Zeile, 3. Spalte (ganz rechts oben): von A_3 nach A_1.

Der Wert ist zunächst $0,5$. Ist der Wert der gesuchte neue Anteil b, ist dieser natürlich b und die „neue" Matrix L sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Dass der Wert von Jahr zu Jahr gleichbleibt, bedeutet, dass für die unbekannte Anfangsverteilung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das folgende LGS:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & & & & & b \cdot x_3 & = & x_1 \\ \text{II} & 0,6x_1 & & & & & = & x_2 \\ \text{III} & & & 0,6x_2 & + & 0,8x_3 & = & x_3 \end{array}$$

Hier bringen Sie in jeder Zeile die Unbekannte auf die linke Seite:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & -x_1 & & & & b \cdot x_3 & = & 0 \\ \text{II} & 0,6x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ \text{III} & & & 0,6x_2 & - & 0,2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Mit anderen Worten: Es ist $\begin{pmatrix} -1 & 0 & b \\ 0,6 & -1 & 0 \\ 0 & 0,6 & -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu lösen, wie in der Aufgabe angegeben.

Führt man mit diesem LGS den Gauß-Algorithmus durch, erhält man die folgende Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rlcrcl} \text{I} & x_1 & & - & b \cdot x_3 & = & 0 \\ \text{II} & & x_2 & - & 0{,}6 \cdot b \cdot x_3 & = & 0 \\ \text{III} & & & & \left(-0{,}2+0{,}36b\right)x_3 & = & 0 \end{array}$$

Versucht man dies durch Rückwärtseinsetzen zu lösen, stellt man fest, dass die Gleichung III $\left(-0{,}2+0{,}36b\right)x_3=0$ für x_3 nur dann eine von Null verschiedene Lösung haben kann, wenn der Faktor $-0{,}2+0{,}36b$ Null ist. Aus dem Ansatz $-0{,}2+0{,}36b=0$ ergibt sich $b=\frac{5}{9}=0{,}\overline{5}$.

Eine Verteilung, die von Jahr zu Jahr konstant bleibt, erhält man dann so:

- Wähle x_3 beliebig positiv, z.B. $x_3=18.000$ (Wegen $b=5/9$ ist es sinnvoll, eine Zahl zu nehmen, die man durch 9 teilen kann.)
- Aus II ergibt sich dann $x_2=0{,}6\cdot\frac{5}{9}\cdot 18.000=6.000$.
- Aus I ergibt sich schließlich: $x_1=\frac{5}{9}\cdot 18.000=10.000$

Abiturprüfung 2020

Probevortrag III: Anilu Meyer

Thema: Mitgliederversammlung

An der Jahreshauptversammlung von Krippe e.V. nehmen insgesamt 48 Mitglieder teil.

a) Für die inhaltliche Arbeit werden insgesamt 8 Arbeitskreise zu 6 Personen gebildet.

Erläutern Sie, wie man berechnen kann, auf wie viele Weisen dies möglich ist.

(Der tatsächliche Wert muss nicht ausgerechnet werden, er ist ungefähr $1{,}719 \cdot 10^{38}$)

b) Für das kommende Jahr sind in den Kitas der Elterninitiative 34 Betreuungsplätze frei, etwa 7 % aller Eltern, die die Zusage für einen Platz erhalten, nehmen diesen nicht an. Es werden deshalb 37 Zusagen erteilt.

Berechnen Sie ohne die Funktionen des GTR zu nutzen, die Wahrscheinlichkeiten, dass

- *genau ein Kind nicht kommt;*
- *genau zwei Kinder nicht kommen;*
- *alle Kinder kommen;*
- *die 34 Plätze für alle Kinder ausreichen.*

c) Für jedes Kind, das über die freien 34 Plätze hinaus betreut werden muss, monatliche Kosten von 250 € an. Die Zufallsvariable X gebe die hierdurch insgesamt im Monat anfallenden Kosten an.

Ermitteln Sie die Verteilung von X und berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$. Interpretieren Sie die Bedeutung von $E(X)$ im vorliegenden Sachzusammenhang.

d) Für die anstehenden Vorstandswahlen soll eine Gruppe von 12 Mitgliedern als Kandidaten bestimmt werden.

Berechnen Sie, auf wie viele Weisen die 12 Personen aus den 48 erschienenen Mitgliedern ausgewählt werden können.

e) Die 12 ausgewählten Kandidaten werden in Form einer Liste der Mitgliederversammlung zur Wahl vorgelegt.

Bestimmen Sie, auf wie viele Weisen die Listenplätze 1 bis 12 belegt werden können.

f) Eine Gruppe von 7 Mitgliedern ist mit der Arbeit des gegenwärtigen Vorsitzenden nicht einverstanden und beantragt, diesen nicht zu entlasten.

Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dem Antrag stattgegeben wird, wenn man davon ausgeht, dass die übrigen 41 Mitglieder zu jeweils etwa 50 % für oder gegen den Antrag stimmen werden, und für die Zustimmung eine absolute Mehrheit der Teilnehmer notwendig ist.

Lösung Vortrag III

a)
- Möglichkeiten für Arbeitskreis 1: $\binom{48}{6}$ (aus den 48 Mitgliedern werden 6 ausgewählt)
- Möglichkeiten für Arbeitskreis 2: $\binom{42}{6}$ (aus den verbleibenden $48-6=42$ Mitgliedern werden 6 ausgewählt)

  ...
- Möglichkeiten für Arbeitskreis 2: $\binom{6}{6}$

Nach dem Zählprinzip gibt es insgesamt $\binom{48}{6}\cdot\binom{42}{6}\cdot\ldots\cdot\binom{6}{6}=\frac{48!}{(6!)^8}\approx 1{,}719\cdot 10^{38}$ verschiedene Möglichkeiten, die 8 Arbeitskreise zu besetzen.

b) Modellierung durch eine Bernoulli-Kette S der Länge 37 mit Trefferwahrscheinlichkeit $p=0{,}07$. Ein Treffer ist ein Kind, das trotz erhaltener Zusage nicht kommt.

- genau ein Kind kommt nicht: $P(S=1)=\binom{37}{1}\cdot 0{,}07^1\cdot 0{,}93^{36}=0{,}18997$
- genau zwei Kinder kommen nicht: $P(S=2)=\binom{37}{2}\cdot 0{,}07^2\cdot 0{,}93^{35}=0{,}257379$
- alle Kinder kommen: $P(S=0)=\binom{37}{0}\cdot 0{,}07^0\cdot 0{,}93^{37}=0{,}068213$
- die 34 Plätze reichen für alle Kinder aus:
  $P(S\geq 3)=1-\left(P(S=0)+P(S=1)+P(S=2)\right)=0{,}484438$

c) Verteilung von X:

Gelbetrag: x	750	500	250
Anzahl der Kinder, die nicht kommen: s	0	1	2
$P(X=x)=P(S=s)$	0,068213	0,18997	0,257379

$E(X)=750\cdot 0{,}068213+500\cdot 0{,}18997+250\cdot 0{,}257379=210{,}4895$

Für $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ benötigt man die Verteilung von X^2. Diese erhält man, wenn in der Verteilung von X die Werte in der ersten Zeile quadriert. Dann ergibt sich:

$E(X^2)=750^2\cdot 0{,}068213+500^2\cdot 0{,}18997+250^2\cdot 0{,}257379=101948{,}5$.

Damit: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=101948{,}5-210{,}4895^2=57642{,}67039$.

$E(X)$ gibt die über die Jahre gesehenen durchschnittlichen monatlichen Kosten an, die zusätzlich entstehen.

d) $\binom{48}{12} = 69.668.534.468$

e) Nach dem Zählprinzip $12! = 479.001.600$

f) Modellierung über eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 41$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$.

Von den 41 Mitgliedern, die nicht zu den Antragstellern gehören, müssen mindestens 18 für den Antrag stimmen, damit dieser eine Mehrheit findet. Der GTR liefert $P(S \geq 18) = 0{,}825556$, d.h., dem Antrag wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 82,6 % zugestimmt.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag IV: Paula Gruß

Thema: Der Server von Krippe e.V.

In der Regel ab Ostern beginnen viele Eltern, sich über mögliche KiTas für ihre Kinder zu informieren. Dies geschieht heute auch mehr und mehr online. Im vergangenen Jahr ist der Sever von Krippe e.V. hierbei an seine Leistungsgrenze gestoßen. Krippe e.V. beauftragte einen Experten, diese Situation zu analysieren. Hierzu hat er ein mathematisches Modell entwickelt, das die Anzahl der Aufrufe der Webseiten von Krippe e.V. analysiert.

Dieses geht für den Zeitraum von 10.00 Uhr bis 22.00 Uhr davon aus, dass die Anzahl der Webseitenzugriffe zum Zeitpunkt x (x gibt die Zeit in Stunden ab 10.00 Uhr an) näherungsweise mit der durch

$$f(x) = 59{,}1x^2e^{-0{,}5x} + 10$$

gegebenen Funktion beschrieben werden kann.

a) *Berechnen Sie die Anzahl der Zugriffe auf die Webseiten von Krippe e.V. um 11.30 Uhr und um 14.45 Uhr.*

b) *Untersuchen Sie die Funktion f auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte und interpretieren Sie die Werte im Sachproblem.*

c) *Weisen Sie nach, dass* durch $F(x) = -118{,}2(x^2 + 4x + 8)e^{-0{,}5x} + 10x$ *eine Stammfunktion zu f gegeben ist.*

d) *Erläutern Sie, welche Bedeutung die Werte $\int_0^{12} f(x)dx$ und $\frac{1}{12}\int_0^{12} f(x)dx$ haben und berechnen Sie diese Werte.*

e) Aus dem Protokoll des Servers geht hervor, dass er bei einem Ausfall im vergangenen Jahr um 13.15 Uhr noch erreichbar war, er jedoch in den darauffolgenden 20 Minuten ausfiel, als 136 gleichzeitige Zugriffe vorlagen.

Berechnen Sie mithilfe des GTR, um wieviel Uhr der Sever ausfiel.

f) An einem anderen Tag fiel der Server aus, als die Anzahl der Zugriffe erstmals um 52 Zugriffe pro Stunde stieg.

Berechnen Sie auch hier mithilfe des GTR, um wieviel Uhr das war.

Lösung Vortrag IV

a)
- 11.30 Uhr entspricht $x=1{,}5$; $f(1{,}5)=72{,}81\approx 73$ gleichzeitige Zugriff um 11.30 Uhr
- 14.45 Uhr entspricht $x=4{,}75$; $f(4{,}75)=134{,}03\approx 134$ gleichzeitige Zugriff um 14.45 Uhr

b) Berechnen der Ableitungen mithilfe der Produktregel

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)\Rightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$$

in Verbindung mit der speziellen Kettenregel $f(x)=e^{g(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$:

- $f'(x)=59{,}1\cdot 2x\cdot e^{-0{,}5x}+59{,}1x^2e^{-0{,}5x}\cdot(-0{,}5)$
  $=\left(59{,}1\cdot 2x+59{,}1x^2\cdot(-0{,}5)\right)\cdot e^{-0{,}5x}=\left(-29{,}55x^2+118{,}2x\right)\cdot e^{-0{,}5x}$
- $f''(x)=(-59{,}1x+118{,}2)\cdot e^{-0{,}5x}+\left(-29{,}55x^2+118{,}2x\right)e^{-0{,}5x}\cdot(-0{,}5)$
  $=\left((-59{,}1x+118{,}2)+\left(-29{,}55x^2+118{,}2x\right)\cdot(-0{,}5)\right)\cdot e^{-0{,}5x}$
  $=\left(14{,}775x^2-118{,}2x+118{,}2\right)\cdot e^{-0{,}5x}$
- $f'''(x)=(29{,}55x-118{,}2)\cdot e^{-0{,}5x}+\left(14{,}775x^2-118{,}2x+118{,}2\right)e^{-0{,}5x}\cdot(-0{,}5)$
  $=\left((29{,}55x-118{,}2)+\left(14{,}775x^2-118{,}2x+118{,}2\right)\cdot(-0{,}5)\right)\cdot e^{-0{,}5x}$
  $=\left(-7{,}3875x^2+88{,}65x-177{,}3\right)\cdot e^{-0{,}5x}$

Berechnen der kritischen Stellen:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -29{,}55x^2+118{,}2x=0\Leftrightarrow x\cdot(-29{,}55x+118{,}2)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=4$$

Überprüfen eines hinreichenden Kriteriums:

- $f''(0)=118{,}2>0\Rightarrow \text{TP}(0|10)$
- $f''(4)=-15{,}997<0\Rightarrow \text{HP}(4|137{,}97)$

Berechnen der Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 14{,}775x^2-118{,}2x+118{,}2=0\Leftrightarrow x=1{,}172\vee x=6{,}828$$

Überprüfen eines hinreichenden Kriteriums:

- $f'''(1{,}172)=-46{,}526<0\Rightarrow \text{LRW}(1{,}172|55{,}157)$, $f'(1{,}172)=54{,}509$
- $f'''(6{,}828)=2{,}5>0\Rightarrow \text{RLW}(6{,}828|100{,}668)$, $f'(6{,}828)=-18{,}778$

Für die Interpretation der Punkte werden noch die Randwerte benötigt:

- $f(0)=10$; $f'(0)=0$
- $f(12)=31{,}095$; $f'(12)=-7{,}032$

Zusammenfassende Interpretation der Werte:

- Größte Anzahl an gleichzeitigen Zugriffen bei $x=4$, also um 14 Uhr mit 138 Zugriffen.

- Geringste Anzahl an gleichzeitigen Zugriffen bei $x=0$, also um 10 Uhr mit 10 Zugriffen.
- Größte Zunahme der Anzahl an gleichzeitigen Zugriffen bei $x=1{,}172$, also um 11.10 Uhr und 20 Sekunden mit 54,509 Zugriffen pro Stunde (etwa 0,91 Zugriffe pro Minute)
- Größte Abnahme der Anzahl an gleichzeitigen Zugriffen bei $x=6{,}828$, also um 16.49 Uhr und 41 Sekunden mit 18,778 Zugriffen pro Stunde (etwa 0,3 Zugriffe pro Minute)

c) Nachweis durch Ableiten mithilfe der Produktregel

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)\Rightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$$

in Verbindung mit der speziellen Kettenregel $f(x)=e^{g(x)}\Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$:

$$\begin{aligned}F'(x)&=-118{,}2\left((2x+4)e^{-0{,}5x}+\left(x^2+4x+8\right)e^{-0{,}5x}\cdot(-0{,}5)\right)+10\\&=-118{,}2\left((2x+4)+\left(x^2+4x+8\right)(-0{,}5)\right)\cdot e^{-0{,}5x}+10\\&=-118{,}2\left(-0{,}5x^2\right)\cdot e^{-0{,}5x}+10=59{,}1\cdot e^{-0{,}5x}+10=f(x)\end{aligned}$$

d)
- $\int_0^{12} f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^{12}=F(12)-F(0)=1007$ ist die Anzahl aller Zugriffe in der Zeit von 10.00 Uhr bis 22.00 Uhr.
- $\frac{1}{12}\int_0^{12} f(x)dx=\frac{1007}{12}\approx 83{,}92$ ist die durchschnittliche Anzahl der Zugriffe pro Stunde.

e) Zu bestimmen ist das in der Nähe von 3,25 liegende x mit $f(x)=136$. Hierzu wird die nSolve-Funktion des GTR verwendet:

$$\text{nSolve}\left(59.1x^2e^{-0.5x}+10=136, x=3.25\right)=3.52$$

Der Server fiel also um 13.31 Uhr und 12 Sekunden aus.

f) Zu bestimmen ist ein x mit $f'(x)=52$, wobei x einen frühen Zeitpunkt des Tages angeben muss, da diese Zugriffsrate laut Aufgabentext *erstmals* vorlag. x muss damit insbesondere vor dem LRW bei 1,172 liegen. Es wird die nSolve-Funktion des GTR mit Startwert 0 verwendet:

$$\text{nSolve}\left(\left(-29.55x^2+118.2x\right)\cdot e^{-0.5x}=52, x=0\right)=0.865$$

Der Server fiel also um 10.51 Uhr und 54 Sekunden aus.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag V: Juliane Glowienka

Thema: Spenden für die KiTa

Um die Ausstattung der KiTa weiter verbessern zu können, bitten Mitarbeiter der KiTa ÖMMES UND OIMEL jedes Jahr die Bewohner im Stadtviertel in einer Spendenaktion um Geldspenden. In den vergangenen Jahren waren jeweils 35 % der Befragten bereit, etwas zu geben. Es wird vermutet, dass dies auch bei der diesjährigen Spendenaktion so sein wird.

a) *Berechnen Sie die kleinste Anzahl an Personen, die zufällig ausgewählt und nach einer Spende gefragt werden müssen, damit mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens einer bereit ist, eine Spende zu geben.*

In diesem Jahr werden zunächst 300 zufällig ausgewählte Bewohner des Viertels nach Spenden gefragt.

b) *Berechnen Sie, mit wie vielen Spendern dem Erwartungswert nach gerechnet werden kann.*

c) Es stellte sich heraus, dass von den 300 befragten Personen sogar 115 Personen bereit waren, eine Spende zu geben.

Untersuchen Sie, ob hieraus bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}1$ geschlossen werden kann, dass mehr als 35 % der Bewohner des Stadtviertels bereit sind, für die KiTa zu spenden.

Hinweis. Erläutern Sie, dass die Hypothese $H_0: p \leq 0{,}35$ getestet werden muss, und bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spender einen Betrag X spendet, der zwischen a und b Euro liegt, kann im Fall $0 \leq a < b \leq 100$ durch

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \text{ mit } f(x) = \frac{0{,}16}{(1+0{,}15x)^2}$$

berechnet werden.

d) *Erläutern Sie wie man nachweisen kann, dass durch $F(x) = -\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15x}$ eine Stammfunktion zu f gegeben ist.*

e) *Weisen Sie nach, dass $P(X \leq 100) = 1$ ist und interpretieren Sie die Bedeutung dieses Resultats im Sachzusammenhang.*

f) *Stellen Sie jeweils kurz dar, wie die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Spendenbetrag*

- *maximal 5 €*
- *zwischen 4 € und 10 €*
- *mehr als 20 €*

beträgt, berechnet werden, und geben Sie dann diese Werte an.

Der zu erwartende Spendenbetrag ist $E(X)=\int_0^{100} g(x)dx$ mit $g(x)=x\cdot f(x)$.

g) *Interpretieren Sie $E(X)$ geometrisch in Bezug auf den Graphen der Funktion g.*

h) *Berechnen Sie $E(X)$ mithilfe des GTR und geben Sie die Bedeutung dieses Wertes im Sachproblem an.*

Lösung Vortrag V

a) Wenn die Bernoulli-Kette S die Anzahl der Spender angibt, ist deren Länge n so zu bestimmen, dass $P_{0,35}(S \geq 1) = 0{,}95$ (oder höher) ist. Umformen der Gleichung:

$$P_{0,35}(S \geq 1) = 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - P_{0,35}(S < 1) = 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - P_{0,35}(S = 0) = 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow P_{0,35}(S = 0) = 0{,}05$$
$$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}35^0 \cdot 0{,}65^n = 0{,}05$$
$$\Leftrightarrow 1 \cdot 1 \cdot 0{,}65^n = 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}65^n = 0{,}05,$$

wobei $P_{0,35}(S = k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}35^k \cdot 0{,}65^{n-k}$ verwendet wurde (Binomialverteilung).

Auflösen der Gleichung $0{,}65^n = 0{,}05$ nach n:

$$0{,}65^n = 0{,}05 \quad | \ln$$
$$\Leftrightarrow \ln(0{,}65^n) = \ln(0{,}05) \Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}65) = \ln(0{,}05) \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}65)} \approx 6{,}95$$

Es müssen also mindestens 7 Personen zufällig ausgewählt und nach einer Spende gefragt werden müssen, damit mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens einer bereit ist, eine Spende zu geben.

b) Modellierung über eine Bernoulli-Kette S der Länge $n = 300$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}35$. Dem Erwartungswert nach kann mit $E(S) = 300 \cdot 0{,}35 = 105$ Spendern gerechnet werden.

c) Die Hypothese $p > 0{,}35$ soll bestätigt werden, sie ist also die Gegenhypothese $H_1: p > 0{,}35$, sodass die Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}35$ getestet werden muss. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test, da H_0 abgelehnt wird, wenn es viele Treffer gibt. Zu bestimmen ist die kleinste Trefferanzahl k mit $P_{0,35}(S \geq k) \leq 0{,}1$.

$n = 300$, $p = 0{,}35$

$\text{nsolve}(\text{binomCdf}(300,0.35,k,300) = 0.1, k = 0)$ liefert den Wert 119, Kontrolle

$\text{binomCdf}(300,0.35,119,300) = 0{,}052$, $\text{binomCdf}(300,0.35,120,300) = 0{,}041$

Der Ablehnungsbereich für H_0 und damit der Annahmebereich für H_1 beginnt also bei 120. Da nur 115 Spender gefunden wurden, kann aufgrund dieses Ergebnisses der Hypothese, dass mehr al 35 % der Bewohner bereits sind zu spenden, bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % nicht zugestimmt werden.

d) Man kann dies nachweisen, indem man die Funktion F mithilfe der allgemeinen Kettenregel ableitet. Zur Illustration wird dies hier durchgeführt.

$$F(x) = -\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15x} = -\frac{16}{15} \cdot (1+0{,}15x)^{-1}$$

$$\Rightarrow F'(x) = -\frac{16}{15} \cdot (-1) \cdot (1+0{,}15x)^{-2} \cdot 0{,}15$$

$$= \frac{16}{100} \cdot (1+0{,}15x)^{-2} = 0{,}16 \cdot \frac{1}{(1+0{,}15x)^2} = f(x)$$

e) $P(X \le 100) = P(0 \le X \le 100) =$

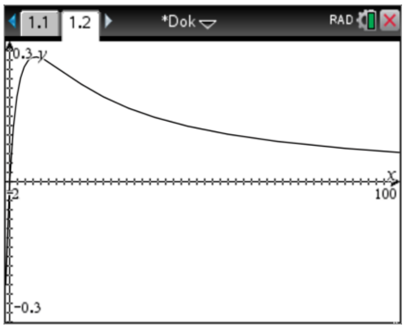
$$= \int_0^{100} f(x)dx = \left[-\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15x}\right]_0^{100} = -\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15 \cdot 100} - \left(-\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15 \cdot 0}\right) = 1$$

Interpretation: Der Spendenbetrag liegt zwischen 0 € und 100 €.

f)
- maximal 5 €: $P(X \le 5) = P(0 \le X \le 5) = \int_0^5 f(x)dx = \left[-\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15x}\right]_0^5 = 0{,}45714$
- zwischen 4 € und 10 €: $P(4 \le X \le 10) = \int_4^{10} f(x)dx = \left[-\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15x}\right]_4^{10} = 0{,}24$
- mehr als 20 €:

  $P(X > 20) = 1 - P(0 \le X \le 20) = 1 - \int_0^{20} f(x)dx = 1 - \left[-\frac{16}{15} \cdot \frac{1}{1+0{,}15x}\right]_0^{20} = 0{,}2$

g) $E(X)$ ist der Inhalt der Fläche, der von der x-Achse und dem Graphen von g im Intervall $0 \le x \le 100$ eingeschlossen wird:



h) Aufrufen des numerischen Integrals mit menu 4 2.

Der GTR berechnet $E(X) = \int_0^{100} \frac{0{,}16x}{(1+0{,}15x)^2} dx = 13{,}05$.

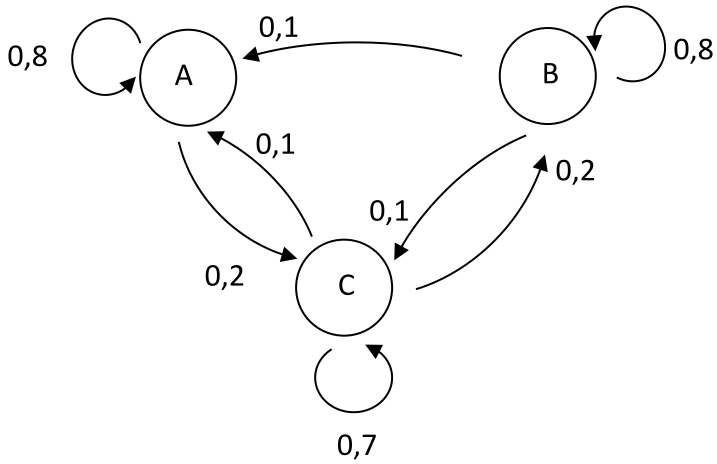
Interpretation: Der durchschnittliche Spendenbetrag ist 13,05 €.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag VI: Michelle Bach

Thema: Kaffeesorten

Im Team-Raum der KiTa Ömmes und Oimel steht immer eine warme Kanne Kaffee bereit. Je nachdem, welches Teammitglied die Kaffeebohnen einkauft, ist er von einer der drei Röstereien A, B oder C. Eine Marktstudie hat gezeigt, dass Kunden gelegentlich zwischen den drei Röstereien wechseln. Ihr monatliches Wechselverhalten, das auf lange Zeit stabil zu bleiben scheint, wurde in der Studie durch die folgende Grafik visualisiert:



a) *Beschreiben Sie das Wechselverhalten durch eine Übergangsmatrix M.*

Im aktuellen Monat haben 370 Tausend Kunden Kaffee von A, 220 Tausend Kunden Kaffee von B und 310 Tausend Kunden Kaffee von C gekauft.

b) *Berechnen Sie die Anzahl der Kunden der drei Röstereien im nächsten Monat.*

c) *Erläutern Sie, wie die Matrix M^2 händisch berechnet wird. Geben Sie mithilfe des GTR diese Matrix an und interpretieren Sie den Eintrag in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie den Eintrag in der dritten Zeile und dritten Spalte im Sachzusammenhang.*

d) *Erläutern Sie, wie ausgehend von den oben genannten aktuellen Anzahlen der Kunden der drei Röstereien die Verteilung der Kundenzahlen auf die Röstereien für den vergangenen Monat händisch berechnet wird. Berechnen Sie dann mithilfe des GTR diese Verteilung.*

e) *Erläutern Sie, wie Sie auf der Basis von insgesamt 900 Tausend Kunden eine Verteilung der Kunden auf die drei Röstereien, die sich im Folgemonat nicht ändert, händisch berechnen. Berechnen Sie dann mithilfe des GTR diese Verteilung.*

f) Bei der angegebenen Matrix M handelt es sich um eine stochastische Matrix. *Erläutern Sie zunächst den Begriff „stochastische Matrix“ und diskutieren Sie kritisch, ob die dahinter liegende Modellannahme für das vorliegende Sachproblem angemessen ist.*

Lösung Vortrag VI

a)

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von} \\ & & \begin{array}{ccc}\text{A} & \text{B} & \text{C}\end{array} \\ \text{nach} & \begin{array}{c}\text{A}\\ \text{B}\\ \text{C}\end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 370 \\ 220 \\ 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 349 \\ 238 \\ 313 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Monat hat A 349 Tausend Kunden, B 238 Tausend Kunden und C 313 Tausend Kunden.

c)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}17 & 0{,}17 \\ 0{,}04 & 0{,}66 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}17 & 0{,}53 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag 0,3 in der dritten Zeile und ersten Spalte besagt, dass in einem Zeitraum von 2 Monaten 30 % der Kunden von A zu C wechseln. Der Eintrag 0,53 in der dritten Zeile und dritten Spalte besagt, dass nach einem Zeitraum von 2 Monaten 53 % der Kunden von C wiederum Kunden von C sind.

d) Zu lösen ist

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 370 \\ 220 \\ 310 \end{pmatrix},$$

also in Gleichungen

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{I} & 0{,}8x_1 & + & 0{,}1x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 370 \\ \text{II} & & & 0{,}8x_2 & + & 0{,}2x_3 & = & 220\,. \\ \text{III} & 0{,}2x_1 & + & 0{,}1x_2 & + & 0{,}7x_3 & = & 310 \end{array}$$

Lösung mithilfe des Gauß-Algorithmus:

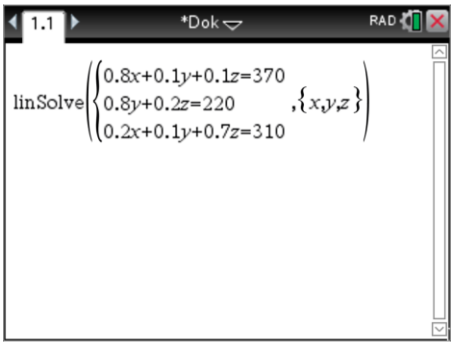
$\text{I} \rightarrow \text{I} : 0{,}8;\ \text{III} \rightarrow \text{III} - \text{I} \cdot 0{,}2$

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{I} & x_1 & + & 0{,}125x_2 & + & 0{,}125x_3 & = & 462{,}5 \\ \text{II} & & & 0{,}8x_2 & + & 0{,}2x_3 & = & 220 \\ \text{III} & & & 0{,}075x_2 & + & 0{,}675x_3 & = & 217{,}5 \end{array}$$

$II \rightarrow II:0{,}8;\ III \rightarrow III - II \cdot 0{,}075$

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & x_1 & + & 0{,}125x_2 & + & 0{,}125x_3 & = & 462{,}5 \\ \text{II} & & & x_2 & + & 0{,}25x_3 & = & 275 \\ \text{III} & & & & & 0{,}65625x_3 & = & 196{,}875 \end{array}$$

Es ergeben sich die Lösungen $x_3 = 300$, $x_2 = 200$ sowie $x_1 = 400$. Im letzten Monat hatte also A 400 Tausend Kunden, B 200 Tausend Kunden und C 300 Tausend Kunden.



Um das LGS mit dem GTR zu lösen, rufen Sie mit Sie menu 3 2 den Löser linSolve für lineare Gleichungssysteme auf und geben das LGS ein.

e) Zu lösen ist

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

also in Gleichungen

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & 0{,}8x_1 & + & 0{,}1x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & x_1 \\ \text{II} & & & 0{,}8x_2 & + & 0{,}2x_3 & = & x_2\,. \\ \text{III} & 0{,}2x_1 & + & 0{,}1x_2 & + & 0{,}7x_3 & = & x_3 \end{array}$$

Die Unbekannten werden auf die linke Seite gebracht:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & -0{,}2x_1 & + & 0{,}1x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 0 \\ \text{II} & & - & 0{,}2x_2 & + & 0{,}2x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 0{,}2x_1 & + & 0{,}1x_2 & - & 0{,}3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Hier wird eine der drei Gleichungen durch die Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 = 900$ ersetzt; beispielsweise die erste:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 900 \\ \text{II} & & - & 0{,}2x_2 & + & 0{,}2x_3 & = & 0 \\ \text{III} & 0{,}2x_1 & + & 0{,}1x_2 & - & 0{,}3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Lösen mithilfe des Gauß-Algorithmus:

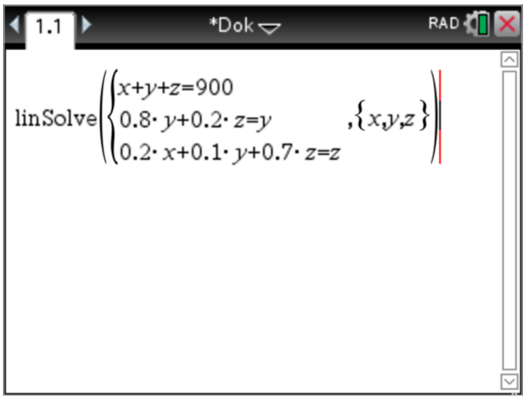
$III \rightarrow III - I \cdot 0{,}2$

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 900 \\ \text{II} & & - & 0{,}2x_2 & + & 0{,}2x_3 & = & 0 \\ \text{III} & & - & 0{,}1x_2 & - & 0{,}5x_3 & = & -180 \end{array}$$

$II \rightarrow II:(-0{,}2);\ III \rightarrow III - II \cdot (-0{,}1)$

$$\begin{array}{lcccccccc}
I & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 900 \\
II & & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\
III & & & & - & 0{,}6x_3 & = & -180
\end{array}$$

Es ergeben sich die Lösungen $x_3 = 300$, $x_2 = 300$ sowie $x_1 = 300$. Wenn sich die Kunden zu gleichen Teilen auf die drei Röstereien aufteilen, verändern sich deren Anzahlen also nicht. Zur Berechnung mit dem GTR ruft man mit [menu] [3] [2] den Löser für lineare Gleichungssysteme auf gibt ein:



f) Bei einer stochastischen Matrix ist die Summe der Einträge jeder Spalte 1. Dem liegt die Modellannahme zu Grunde, dass keine Kunden ausscheiden und keine neuen Kunden hinzukommen. Dies ist auf lange Sicht nicht realistisch.

Abiturprüfung 2020

Probevortrag VII: Arwa Kanaan

Thema: Bevölkerungsstruktur in Deutschland

Die Anzahl der Bewohner der Bundesrepublik Deutschland im Alter von x Jahren kann in grober Näherung durch

$$f(x)=\left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}5$$

berechnet werden. Dabei wird $f(x)$ in Millionen gemessen.

a) *Berechnen Sie die Anzahl der Bewohner Deutschlands im Alter von 18 Jahren.*

b) *Lösen Sie die Gleichung $f(x)=0{,}5$ und interpretieren Sie die gefundenen Werte im Sachzusammenhang.*

c) *Bestimmen Sie die Extrempunkte von f und überprüfen Sie, dass $f(x)$ negativ ist, falls $x\geq 99$ ist.*

Zur Kontrolle: $f'(x)=\left(-0{,}0004x^2+0{,}012x\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$

$$f''(x)=\left(0{,}00002x^2-0{,}0014x+0{,}012\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$$

d) *Interpretieren Sie die Ergebnisse aus c) im vorliegenden Sachzusammenhang.*

e) *Bestimmen Sie, bei welchem Alter die Anzahl der Bewohner am stärksten zu- und bei welchem Alter sie am stärksten abnimmt. Berechnen Sie auch die Höhe des stärksten Wachstums und der stärksten Abnahme.*

f) *Weisen Sie nach, dass durch $F(x)=-\left(0{,}16x^2+8x+192\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}5x$ eine Stammfunktion zu f gegeben ist.*

g) Die Finanzausstattung der gesetzlichen Rentenversicherung ist ständiges Thema in der öffentlichen Debatte. Eine Kennziffer hierfür ist, wie viele Bewohner im erwerbstätigen Alter (18 bis 65 Jahre) auf einen Bewohner im Rentenalter (Alter ab 66 Jahren) entfallen.

Berechnen Sie die Anzahl der Bewohner im erwerbstätigen Alter und die Anzahl der Bewohner im Rentenalter. Bestimmen Sie dann die angesprochene Kennziffer

Hinweis: Die Anzahl aller Bewohner im Alter von a bis b Jahren erhält man durch Integration der Funktion f von a bis b.

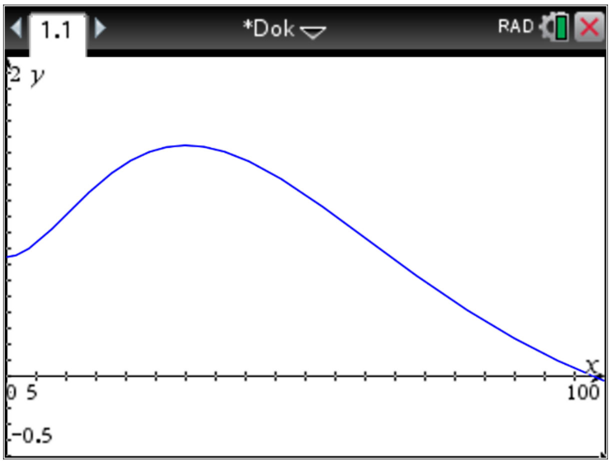
h) *Weisen Sie nach, dass die die Bevölkerungszahl in Deutschland ungefähr 85,96 Millionen beträgt.*

Bestimmen Sie dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig angetroffener Bewohner Deutschlands im erwerbstätigen Alter ist.

Lösung Vortrag VII

a) $f(18)=\left(0{,}008\cdot 18^2+0{,}08\cdot 18+1{,}6\right)e^{-0{,}05\cdot 18-0{,}25}-0{,}5=1{,}2833$ Millionen

b) $f(x)=0{,}5 \Leftrightarrow \left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}5=0{,}5$ kann nicht direkt gelöst werden (Nullteilerfreiheit kann nicht verwendet werden, da auf keiner Seite Null und auf keiner Seite (nur) ein Produkt steht.)



Man muss mit nSolve arbeiten! Lässt man sich den Graphen von f mit dem GTR zeichnen, sieht man, dass der Graph nur im „rechten" Teil in der Höhe 0,5 über der x-Achse verläuft, nämlich bei etwa $x=60$. Dies kann man als Näherungswert für nSolve gewählt werden:

$\text{nSolve}\left(\left(0.008x^2+0.08x+1.6\right)e^{-0.05x-0.25}-0.5=0.5, x=60\right)$ liefert die Lösung $x=73{,}5351$

.

Zu dieser Lösung wäre man auch gekommen, wenn man ohne weitere Überlegung den Näherungswert 0 genommen hätte, also

$\text{nSolve}\left(\left(0.008x^2+0.08x+1.6\right)e^{-0.05x-0.25}-0.5=0.5, x=0\right)$

eingegeben hätte.

c) Berechnen der Ableitungen mithilfe der Produktregel

$f(x)=g(x)\cdot h(x) \Rightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$

in Verbindung mit der speziellen Kettenregel $f(x)=e^{g(x)} \Rightarrow f'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$:

$$f'(x)=\left(0{,}016x+0{,}08\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}05\left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$$
$$=\left(-0{,}0004x^2+0{,}012x\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$$

$$f''(x)=\left(-0{,}0008x+0{,}012\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}-0{,}05\left(-0{,}0004x^2+0{,}012x\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$$
$$=\left(0{,}00002x^2-0{,}0014x+0{,}012\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}$$

Berechnen der kritischen Stellen:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}0004x^2+0{,}012x=0 \Leftrightarrow x\left(-0{,}0004x+0{,}012\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=0, x_2=30$$

Überprüfen eines ein hinreichendes Kriterium und berechnen der Koordinaten:

Vorzeichenwechseltest: Hilfsstellen z.B. $x=-1$, $x=10$ und $x=40$

$f'(-1) = -0{,}01 < 0$, $f'(10) = 0{,}038 > 0$, $f'(40) = -0{,}017 < 0$

oder Test über die zweite Ableitung:

$f''(0) = 0{,}009 > 0$, $f''(30) = -0{,}002 < 0$

Beides impliziert $T(0|0{,}746)$ und $H(30|1{,}446)$.

Nachprüfen, das f negativ ist, falls $x \geq 99$: $f(99) = -0{,}015$ und der Graph kann nicht wieder „nach oben" laufen, da es keinen Tiefpunkt mehr gibt.

d) Die meisten Bewohner sind 30 Jahre alt, nämlich 1,446 Millionen Menschen. Es gibt 0,746 Millionen Kinder unter einem Jahr. Bis zum Alter von 30 Jahren steigt die Anzahl der Menschen im entsprechenden Alter immer weiter an. Es gibt (im Wesentlichen) keine Menschen in Deutschland, die 99 Jahre alt oder älter sind.

e)
- stärkste Zunahme am LR-Wendepunkt; um die Höhe der stärksten Zunahme zu berechnen, setzt man die x-Koordinate des LR-Wendepunktes in f' ein.
- stärkste Abnahme am RL-Wendepunkt; um die Höhe der stärksten Abnahme zu berechnen, setzt man die x-Koordinate des RL-Wendepunktes in f' ein.

Berechnen der dritten Ableitung:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (0{,}00004x - 0{,}0014)e^{-0{,}05x-0{,}25} - 0{,}05(0{,}00002x^2 - 0{,}0014x + 0{,}012)e^{-0{,}05x-0{,}25} \\ &= (0{,}000001x^2 - 0{,}00011x - 0{,}002)e^{-0{,}05x-0{,}25} \end{aligned}$$

Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}00002x^2 - 0{,}0014x + 0{,}012 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 10, x_2 = 60$$

Überprüfen von f''':

- $f'''(10) = -00047 < 0 \Rightarrow \text{LRW bei } x = 10; f'(10) = 0{,}0378$
- $f'''(60) = 0{,}00004 > 0 \Rightarrow \text{RLW bei } x = 60; f'(60) = -0{,}0279$

Maximale Zunahme bei Alter 10 mit 0,0378 Millionen Menschen pro Lebensjahr. Maximale Abnahme bei Alter 60 mit 0,0279 Millionen Menschen pro Lebensjahr.

f) Nachweis durch Ableiten mithilfe der Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

in Verbindung mit der speziellen Kettenregel $f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$:

$$F'(x) = -\left(\left(0{,}32x+8\right)e^{-0{,}05x-0{,}25} + \left(-0{,}05\right)\left(0{,}16x^2+8x+192\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}\right) - 0{,}5$$
$$= -\left(\left(0{,}32x+8\right)e^{-0{,}05x-0{,}25} + \left(-0{,}008x^2-0{,}4x-9{,}6\right)e^{-0{,}05x-0{,}25}\right) - 0{,}5$$
$$= -\left(\left(0{,}32x+8\right) + \left(-0{,}008x^2-0{,}4x-9{,}6\right)\right)\cdot e^{-0{,}05x-0{,}25} - 0{,}5$$
$$= -\left(-0{,}008x^2-0{,}08x-1{,}6\right)\cdot e^{-0{,}05x-0{,}25} - 0{,}5$$
$$= \left(0{,}008x^2+0{,}08x+1{,}6\right)\cdot e^{-0{,}05x-0{,}25} - 0{,}5 = f(x)$$

g) Laut Hinweis ist $\int_a^b f(x)dx$ die Anzahl der Menschen im Alter von a Jahren bis b Jahren, also

- Anzahl der Bewohner im erwerbstätigen Alter (also von 18 Jahren bis 65 Jahren) $\int_{18}^{65} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{18}^{65} = F(65) - F(18) = 57{,}39$ Millionen Menschen.
- Anzahl der Bewohner im Rentenalter (also zwischen 66 und 98 Jahren, da es nach d) keine Bewohner gibt, die Älter als 98 Jahre sind) $\int_{66}^{98} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{66}^{98} = F(98) - F(66) = 10{,}13$ Millionen Menschen.

Berechnen der Kennziffer

$$\frac{\text{Bewohner im erwerbsfähigen Alter}}{\text{Bewohner im Rentenalter}} = \frac{57{,}39}{10{,}13} = 5{,}665$$

Auf einen Bewohner im Rentenalter kommen also (im Schnitt) 5,665 Bewohner im erwerbsfähigen Alter.

h) Da kein Bewohner älter als 98 Jahre ist, ist die Gesamtanzahl aller Bewohner

$$\int_0^{98} f(x)dx\left[F(x)\right]_0^{98} = F(98) - F(0) = 85{,}958 \approx 85{,}96\,.$$

Nach Laplace wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig angetroffener Bewohner Deutschlands im erwerbstätigen Alter ist. wie folgt berechnet:

$$\frac{\text{Anzahl der Bewohner im erwerbsfähigen Alter}}{\text{Azahl aller Bewohner}} = \frac{57{,}39}{85{,}96} = 0{,}6676$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig angetroffener Bewohner Deutschlands im erwerbstätigen Alter ist, beträgt also 66,76 %.

Abiturprüfung Mathematik 2020

Probevortrag VIII: Maren True

Thema: Osterhasen

Ein Supermarkt startet vor Ostern eine Werbeaktion, bei der die Kunden Schoko-Osterhasen gewinnen können. Das Gewinnspiel ist wie folgt konzipiert: In einer Urne sind 22 rote und 10 schwarze Kugeln, die sich nur in der Farbe unterscheiden. Der Kunde zieht blind nacheinander drei Kugeln. Er gewinnt, wenn er genau zwei rote und eine schwarze Kugel (in beliebiger Reihenfolge) zieht. Dabei ist ihm freigestellt, ob er mit oder ohne Zurücklegen zieht. Er muss dies nur vor seinem ersten Zug festlegen.

a) *Stellen Sie die Situation beim Ziehen ohne Zurücklegen in einem Baumdiagramm dar und erläutern Sie, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit in diesem Fall* $p=0{,}47$ *ist. Bestimmen Sie außerdem die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Ziehen mit Zurücklegen und entscheiden Sie, ob es günstiger ist, mit oder ohne Zurücklegen zu ziehen.*

b) Ein anderer Kunde zieht ohne Zurücklegen und zieht als erstes eine rote Kugel. Er wertet dies positiv: „Das ist ja schon fast die halbe Miete.“ *Untersuchen Sie, ob sein Optimismus gerechtfertigt ist.*

c) *Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit, bei Ziehen ohne Zurücklegen zu gewinnen* ***und*** *im ersten Zug eine rote Kugel gezogen zu haben,* $77/248$ *beträgt. Verwenden Sie dies, um mithilfe eines geeigneten Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass bei Ziehen ohne zurücklegen ein Gewinner im ersten Zug eine rote Kugel gezogen hat.*
Hinweis. Gesucht ist hier die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\text{Gewinn}}(\text{erste Kugel rot})$.

d) Von den zu gewinnenden Osterhasen sind erfahrungsgemäß 8 % aus dem vergangenen Jahr, sodass deren Qualität schlechter ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 Gewinnern genau 8 bzw. mehr als 8 einen alten Osterhasen bekommen.

e) Die Leitung des Supermarkts möchte keinen Imageverlust durch das Abgeben zu vieler alter Osterhasen riskieren und will das Gewinnspiel abbrechen, wenn mehr als 8 % der Osterhasen aus dem Vorjahr stammen. Hierzu lässt sie von den vorhandenen Osterhasen eine Stichprobe von 125 Stück untersuchen, um einen einseitigen Hypothesentest durchzuführen.

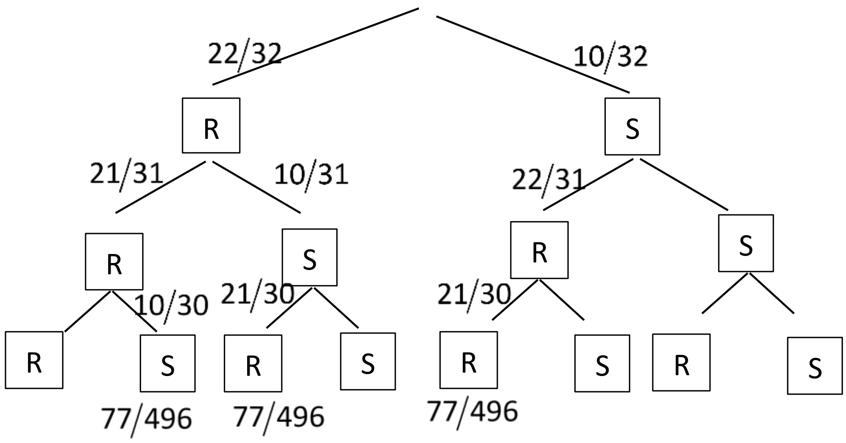
Entscheiden Sie sich begründet, welche der beiden möglichen Nullhypothesen $H_0: p \leq 0{,}08$ *und* $H_0: p \geq 0{,}08$ *dem Test zugrunde liegen sollte. Erläutern Sie jeweils die Bedeutung eines Fehlers erster Art.*

f) *Bestimmen Sie für das Testen der Nullhypothese* $H_0: p \geq 0{,}08$ *den Ablehnungsbereich auf dem Signifikanzniveau* $\alpha = 0{,}1$ *und formulieren Sie die Entscheidungsregel.*

Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Leitung des Supermarktes aufgrund der Entscheidungsregel das Glücksspiel fortsetzt, obwohl 11 % der Osterhasen alt sind.

Lösung Vortrag VIII

a) Gewinnwahrscheinlichkeit ohne Zurücklegen:



Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist also

$3 \cdot 77/496 = 231/496 \approx 0,47$

Gewinnwahrscheinlichkeit mit Zurücklegen:

Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 3$ mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 22/32 = 0,6875$. Ein Treffer ist eine rote Kugel, ein Gewinn liegt bei genau 2 Treffern vor.

$$P(S=2) = \binom{3}{2} \cdot 0,6875^2 \cdot 0,3125 = \frac{1815}{4096} = 0,443115234$$

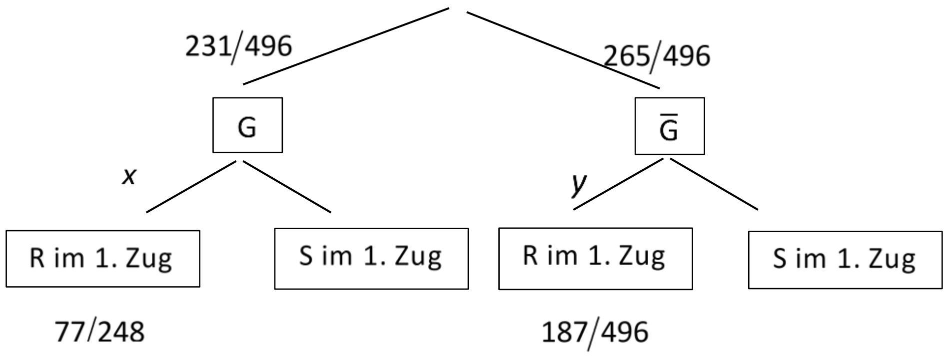
Da die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Ziehen ohne Zurücklegen größer ist, sollte man ohne Zurücklegen ziehen.

b) Untersuchung mithilfe eines Baumdiagramms wie in a) zeigt, dass

- wenn Rot schon gezogen wurde, das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $21/31 \cdot 10/30 + 10/31 \cdot 21/30 = 14/31 \approx 0,4516$ gewonnen wird.
- wenn Schwarz zuerst gezogen wird, das Spiel jedoch mit einer Wahrscheinlichkeit von $22/31 \cdot 21/30 = 77/155 \approx 0,497$ gewonnen wird.

Es ist also günstiger, im ersten Zug eine schwarze Kugel zu ziehen.

c) Aus dem Baumdiagramm in a) ergibt sich: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $2 \cdot 77/496 = 77/248$. Um die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, wird ein Baumdiagramm aufgestellt, das auf der ersten Stufe nach „Gewinn“ (G) und kein Gewinn ($\overline{G}$) unterscheidet. Wir geben hier nur die benötigten Wahrscheinlichkeiten an und bezeichnen die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit x. Mithilfe der bereits bekannten Wahrscheinlichkeiten ergibt sich



Aus $\frac{231}{496} \cdot x = \frac{77}{248}$ ergibt sich $P(\text{erste Kugel rot} \mid \text{Gewinn}) = x = \frac{2}{3}$.

Zusatz (außerhalb der Aufgabe): Aus dem Baumdiagramm ergibt sich

$P(\text{erste Kugel rot} \mid \text{kein Gewinn}) = y = \frac{187}{265} \approx 0,71$.

d) Modellierung als Bernoulli-Kette der Länge $n = 100$; $p = 0,08$. Damit ergibt sich

- $P(S=8) = \text{binomPdf}(100{,}0.08{,}8) = 0.14552$;
- $P(S>8) = \text{binomCdf}(100{,}0.08{,}9{,}100) = 0.40737$.

e) Bei $H_0: p \leq 0,08$ bedeutet ein Fehler erster Art, dass weniger als 8 % der Osterhasen alt sind, das Spiel aber dennoch abgebrochen wird. Bei $H_0: p \geq 0,08$ bedeutet ein Fehler erster Art, dass mindestens 8 % der Osterhasen alt sind, das Spiel aber weitergeführt wird. Dieser Fehler wird wegen des Imageverlusts vom Supermarkt als gravierender angesehen, weshalb die Wahrscheinlichkeit, diesen Fehler zu machen, gering gehalten werden sollte.

f) Es handelt sich um einen linksseitigen Test, da H_0 abgelehnt wir, wenn wenige Treffer vorliegen. Zu bestimmen ist die größte Trefferanzahl k mit $P_{0,08}(S \leq k) \leq 0,1$.

$n = 125$, $p = 0,08$

$\text{nSolve}(\text{binomCdf}(125{,}0.08{,}0{,}k) = 0{,}1{,}k = 125)$ liefert die Lösung 6, nach Überprüfen ergibt sich als korrekte Lösung $k = 5$.

Entscheidungsregel:

- Mehr als 5 alte Osterhasen führen zum Abbruch des Spiels (Annahme der Hypothese)

- Bis zu 5 alte Osterhasen führen zur Fortsetzung des Spiels (Ablehnung der Hypothese)

Wahrscheinlichkeiten für Fortsetzung, obwohl 11 % der Osterhasen alt sind:

$P_{0,11}(S \leq 5) = \text{binomCdf}(125, 0.11, 0, 5) = 0.0046$

Abiturprüfung 2020

Probevortrag IX: Marie Schmitz

Thema: Make Alabama Great Again!

Die Firma ALABAMA INSTRUMENTS stellt Taschenrechner in Massenproduktion her. Im Rahmen der Initiative *Make Alabama Great Again!* soll die Qualität der Produktion verbessert werden. Ein Werk in Mexiko steht im Verdacht, besonders viele defekte Taschenrechner zu produzieren. Die Firmenleitung plant, das Werk zu schließen, wenn mehr als 5 % der dort produzierten Geräte defekt sind. Um dies zu prüfen, werden aus der dortigen Produktion 500 Geräte zufällig entnommen und überprüft.

a) *Geben Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % an, wie viele Geräte davon mindestens fehlerhaft sein müssen, damit dieser Vermutung zugestimmt werden kann.*

b) Die Werksleitung in Mexiko will ihrerseits mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % belegen, dass weniger als 3 % der produzierten Geräte defekt sind.

Geben Sie an, wie viele der 500 Geräte maximal einen Fehler haben dürfen, damit dieser Hypothese bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % zugestimmt werden kann.

c) Angenommen, es sind genau 4 % der in Mexiko produzierten Taschenrechner defekt.

Berechnen Sie, wie viele Taschenrechner man der Produktion mindestens zufällig entnehmen muss, damit darunter mit Wahrscheinlichkeit 0,99 mindestens ein defektes Gerät ist.

Für die Zufallsvariable X, die Anzahl der Tage angibt, bis ein Taschenrechner von ALABAMA INSTRUMENTS kaputt geht, gilt

- $P(X \le t) = \int_0^t 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001 \cdot x} dx$, wobei $t \ge 0$ ist, sowie
- $P(s \le X \le t) = \int_s^t 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001 \cdot x} dx$, wobei $0 \le s \le t$ ist.

(Eine derartige Zufallsvariable heißt auch EXPONENTIALVERTEILT MIT PARAMETER $0{,}001$.)

d) *Weisen Sie nach dass durch $F(x) = -e^{-0{,}001x}$ eine Stammfunktion zu $f(x) = 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x}$ gegeben ist.*

e) *Berechnen Sie $\int_{50}^{150} 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x} dx$ und interpretieren Sie diesen Wert im vorliegenden Sachkontext.*

f) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taschenrechner höchstens 365 Tage funktioniert.*

g) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taschenrechner mehr als 5 Jahre funktioniert.*

Für den Erwartungswert *von X gilt $E(X) = \int_0^\infty 0{,}001 \cdot xe^{-0{,}001x} dx$*

h) *Weisen Sie nach, dass* $G(x) = -(1000 + x)e^{-0{,}001x}$ eine Stammfunktion zur Funktion $f(x) = 0{,}001 \cdot xe^{-0{,}001x}$ ist.

i) Es gilt $E(X) = 1000$.

Überlegen Sie, wie Sie dies berechnen können, und interpretieren Sie dann den Erwartungswert im Sachzusammenhang.

Lösungen Vortrag IX

a) Die Hypothese $p>0{,}05$ soll nachgewiesen werden. Sie ist also die Gegenhypothese: $H_1: p>0{,}05$. Zu testen ist also die Nullhypothese $H_0: p\leq 0{,}05$. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test, da die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn viele Treffer vorliegen. Zu bestimmen ist die kleinste Trefferanzahl k mit $P_{0,05}\left(S\geq k\right)\leq 0{,}1$.

$\text{nsolve}\left(\text{binomCdf}\left(500,0.05,k,500\right)=0.1,k=0\right)$ liefert $k=31$.

Kontrolle:

$\text{binomCdf}\left(500,0.05,31,500\right)=0{,}13085$, $\text{binomCdf}\left(500,0.05,32,500\right)=0{,}09445$

Der Ablehnungsbereich von H_0 beginnt also bei 32. Der ursprünglichen Hypothese, dass die Wahrscheinlichkeit für einen defekten Taschenrechner bei mehr als 5 % liegt, wird also zugestimmt, wenn mindestens 32 fehlerhafte Geräte gefunden werden.

b) Die Hypothese $p<0{,}03$ soll nachgewiesen werden. Sie ist also die Gegenhypothese: $H_1: p<0{,}03$. Zu testen ist also die Nullhypothese $H_0: p\geq 0{,}03$. Es handelt sich um einen linksseitigen Test, da die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn wenige Treffer vorliegen. Zu bestimmen ist die größte Trefferanzahl k mit $P_{0,03}\left(S\leq k\right)\leq 0{,}05$.

$\text{nsolve}\left(\text{binomCdf}\left(500,0.03,0,k\right)=0.05,k=500\right)$ liefert $k=9$.

Kontrolle:

$\text{binomCdf}\left(500,0.03,0,9\right)=0{,}06693$, $\text{binomCdf}\left(500,0.03,02,8\right)=0{,}035413$

Der Ablehnungsbereich von H_0 endet also bei 8. Der ursprünglichen Hypothese, dass die Wahrscheinlichkeit für einen defekten Taschenrechner bei weniger als 3 % liegt, wird also zugestimmt, wenn höchstens 8 fehlerhafte Geräte gefunden werden.

c) Wenn die Bernoulli-Kette S die Anzahl der defekten Geräte angibt, ist deren Länge n so zu bestimmen, dass $P_{0,04}\left(S\geq 1\right)=0{,}99$ (oder höher) ist. Umformen der Gleichung:

$$P_{0,04}\left(S\geq 1\right)=0{,}99\Leftrightarrow 1-P_{0,04}\left(S<1\right)=0{,}99\Leftrightarrow 1-P_{0,04}\left(S=0\right)=0{,}99$$
$$\Leftrightarrow P_{0,04}\left(S=0\right)=0{,}01$$
$$\Leftrightarrow \binom{n}{0}\cdot 0{,}04^0\cdot 0{,}96^n=0{,}01$$
$$\Leftrightarrow 1\cdot 1\cdot 0{,}96^n=0{,}01\Leftrightarrow 0{,}96^n=0{,}01,$$

wobei $P_{0,04}\left(S=k\right)=\binom{n}{k}\cdot 0{,}04^k\cdot 0{,}96^{n-k}$ verwendet wurde (Binomialverteilung).

Auflösen der Gleichung $0{,}96^n=0{,}01$ nach n:

$0{,}96^n = 0{,}01 \quad | \ln$

$$\Leftrightarrow \ln\left(0{,}96^n\right) = \ln\left(0{,}01\right) \Leftrightarrow n \cdot \ln\left(0{,}96\right) = \ln\left(0{,}01\right) \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(0{,}01\right)}{\ln\left(0{,}96\right)} \approx 112{,}8$$

Es müssen also mindestens 113 Geräte zufällig entnommen werden, damit darunter mit Wahrscheinlichkeit 0,99 mindestens ein defektes Gerät ist.

d) Nachweis z.B. durch Ableiten von F mithilfe der speziellen Kettenregel

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x): \; F'(x) = -e^{-0{,}001x} \cdot \left(-0{,}001\right) = 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x} = f(x).$$

e) $$\int_{50}^{150} 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001x} dx = \left[-e^{-0{,}001x}\right]_{50}^{150} = -e^{-0{,}001 \cdot 150} - e^{-0{,}001 \cdot 50} = 0{,}0905$$

Interpretation: Das ein Taschenrechner frühestens nach 50 und spätestens nach 150 Tagen kaputt geht, ist etwa 9,05 %.

f) Zu berechnen ist $P\left(X \leq 365\right)$:

$$P\left(X \leq 365\right) = \int_{0}^{365} 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001 \cdot x} dx = \left[-e^{-0{,}001x}\right]_{0}^{365} = -e^{-0{,}001 \cdot 365} - e^{-0{,}001 \cdot 0} = 0{,}3058$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taschenrechner höchstens 365 Tage funktioniert, ist 30,58 %.

g) 5 Jahre sind (je nach dem, ob der Zeitbereich ein oder zwei Schaltjahre umfasst) 1826 Tage bzw. 1827 Tage. Wir gehen vom ersten Fall aus.

Zu berechnen ist dann $P\left(X > 1826\right)$:

$$P\left(X > 1826\right) = 1 - P\left(X \leq 1826\right) = 1 - \int_{0}^{1826} 0{,}001 \cdot e^{-0{,}001 \cdot x} dx$$

$$= 1 - \left[-e^{-0{,}001x}\right]_{0}^{1826} = 1 - \left(-e^{-0{,}001 \cdot 1826} - e^{-0{,}001 \cdot 0}\right) = 0{,}16106$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Taschenrechner mehr als 5 Jahre funktioniert, beträgt also 16,11 %

h) Nachweis mithilfe der Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

in Verbindung mit der speziellen Kettenregel.

$$G'(x) = -1 \cdot e^{-0{,}001x} + \left(-\left(1000 + x\right) \cdot e^{-0{,}001x} \cdot \left(-0{,}001\right)\right) =$$

$$= -e^{-0{,}001x} + \left(e^{-0{,}001x} + 0{,}001x \cdot e^{-0{,}001x}\right) = 0{,}001x \cdot e^{-0{,}001x} = f(x)$$

i) Man kann $\int_{0}^{N} 0{,}001 \cdot x e^{-0{,}001x} dx$ für sehr große Werte von N berechnen, z.B. $n = 1000000$

Interpretation: Im Schnitt geht ein Taschenrechner von Alabama Instruments nach 1000 Tagen kaputt (2 Jahre und 270 Tage).

Abiturprüfung 2020

Probevortrag X: Selina Reuter

Thema: Anmeldezahlen eines beruflichen Gymnasiums

Der Abteilungsleiter eines zweizügigen Beruflichen Gymnasiums geht davon aus, dass von allen ursprünglich in die Jahrgangsstufe 11 aufgenommenen Bewerbern etwa 4 % am ersten Schultag nicht erscheinen. Für das kommende Schuljahr erhalten 64 Bewerber eine Zusage. es soll zunächst davon ausgegangen werden, dass wie vom Abteilungsleiter vermutet 4 % der Bewerberinnen und Bewerber mit Zusage am ersten Schultag nicht erscheinen werden.

a) *Modellieren Sie Anzahl der nicht erscheinenden Schülerinnen und Schüler in einer geeigneten Bernoulli-Kette S und berechnen Sie deren Mittelwert und Standardabweichung. Interpretieren Sie die Bedeutung von μ in der vorliegenden Situation.*

b) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 64 Bewerbern*

- *genau 60 Bewerber*
- *mehr als 60 Bewerber*
- *weniger als 55 Bewerber*

am ersten Schultag erscheinen werden.

c) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle am ersten Schultag erscheinenden Bewerber in zwei Klassen mit je 30 Schülerinnen und Schülern untergebracht werden können.*

Sind Schulplätze am Anfang des Schuljahres nicht besetzt, muss die Stadt als Trägerin des Berufskollegs an das Land eine Strafzahlung abführen. Die Erträge aus den Strafzahlungen aller Schulen des Landes sollen später den Schulen zur Verfügung gestellt werden, die ihre Kapazitäten voll ausgeschöpft haben. Folgende Beträge sind bei 60 zu besetzenden Schulplätzen für das Berufliche Gymnasium abzuführen:

Anzahl der besetzten Plätze	Höhe der Zahlung ans Land
60 oder mehr	keine Zahlung
59	500 €
58	1.000 €
57	2.500 €
56	5.000 €
weniger als 56	8.000 €

Die Zufallsvariable X gebe die Höhe der Strafzahlung an.

d) *Stellen Sie die Verteilung von X auf und berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$. Interpretieren Sie die Bedeutung von $E(X)$ im Sachzusammenhang.*

Die Schulleiterin bezweifelt die Hypothese des Abteilungsleiters, dass (mindestens) 4 % am ersten Schultag nicht erscheinen, da am ersten Schultag nur ein Bewerber nicht auftaucht.

e) *Entscheiden Sie, ob dies bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von* $\alpha = 0{,}1$ *für die Vermutung der Schulleiterin spricht, dass weniger als 4 % der Bewerber am ersten Schultag nicht erscheinen.*

Hinweis. Begründen Sie, dass sie die Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}04$ *getestet werden sollte, und bestimmen Sie die Entscheidungsregel.*

f) Der Abteilungsleiter möchte nachweisen, dass seine Hypothese „mindestens 4 % erscheinen am ersten Schultag nicht“ richtig ist.

Untersuchen Sie, ob seine Vermutung durch das vorliegende Ergebnis des ersten Schultages bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % gestützt wird.

Hinweis. Die speziellen Funktionen des GTR dürfen durchgehend verwendet werden.

Lösungen Vortrag X

a) $n=64$, $p=0{,}04$. Ein Treffer ist eine potentielle Schülerin/ ein potentieller Schüler, der am Einschulungstag nicht erscheint.

$\mu=64\cdot 0{,}04=2{,}56$, $\sigma^2=64\cdot 0{,}04\cdot 0{,}96=2{,}4576$, $\sigma=\sqrt{2{,}4576}=1{,}568$

Bedeutung von μ: Im Durchschnitt vieler Jahre mit 64 Zusagen werden jährlich 2,56 Bewerber nicht erscheinen.

b) Mithilfe des GTR findet man

- $P(S=4)=\text{binomPdf}(64,0.04,4)=0{,}140457$
- $P(S\leq 3)=\text{binomCdf}(64,0.04,0,3)=0{,}746673$
- $P(S\geq 10)=\text{binomCdf}(64,0.04,10,64)=0{,}000219$

c) Es können alle Schüler untergebracht werden, wenn höchstens 60 Bewerber erscheinen, also 4 oder mehr Bewerber absagen:

$P(S\geq 4)=\text{binomCdf}(64,0.04,4,64)=1-0{,}7447=0{,}253327$

d) Verteilung von X

Höhe der Zahlung ans Land: x	Anzahl der besetzten Plätze	Anzahl der nicht erschienenen Schülerinnen und Schüler: s	$P(X=x)=\begin{cases}P(S\leq s)\\P(S=s)\\P(S>s)\end{cases}$
0	60 oder mehr	4 oder weniger	$P(S\leq 4)=0{,}88713$
500 €	59	5	$P(S=5)=0{,}070229$
1.000 €	58	6	$P(S=6)=0{,}028774$
2.500 €	57	7	$P(S=7)=0{,}009934$
5.000 €	56	8	$P(S=8)=0{,}002949$
8.000 €	weniger als 56	mehr als 8	$P(S\geq 9)=0{,}00098$

$$\begin{aligned}E(X)&=0\cdot 0{,}88713+500\cdot 0{,}070229+1.000\cdot 0{,}028774+\\&\quad 2.500\cdot 0{,}009934+5.000\cdot 0{,}002949+8.000\cdot 0{,}00098\\&=111{,}3085\end{aligned}$$

Im Schnitt sind pro Jahr 111,31 € zu zahlen.

Berechnung von $V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$. Die Verteilung von X^2 erhält man, indem man in der Verteilung von X die Werte in der linken Spalte quadriert. Deshalb ist

$$E\left(X^2\right) = 0^2 \cdot 0{,}88713 + 500^2 \cdot 0{,}070229 + 1.000^2 \cdot 0{,}028774 +$$
$$2.500^2 \cdot 0{,}009934 + 5.000^2 \cdot 0{,}002949 + 8.000^2 \cdot 0{,}00098$$
$$= 244.863{,}75$$

Damit ergibt sich $V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2 = 244.863{,}75 - 111{,}3085^2 = 232.474{,}167828$

Abiturprüfung 2020

Probevortrag XI: Emelie Puzicha

Thema: Randomized Response Technik

Hat die Gefahr einer HIV-Infektion bei Teenagern zu einem verantwortungsvollem Sexualverhalten geführt? Um dies zu untersuchen, befragt ein Forschungsinstitut Jugendliche, ob sie in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatten. Da anzunehmen ist, dass die Wenigsten darüber offen sprechen wollen, wird die **Randomized Response Technik** angewendet: Der/dem Befragten wird eine Urne übergeben, die die folgenden drei Karten enthält:

Die/der Befragte wird dann aufgefordert, eine der Karten zufällig aus der Urne zu ziehen, ohne sie dem Interviewer zu zeigen, und dann die Frage auf der Karte *wahrheitsgemäß* zu beantworten. Der Interviewer notiert nur die Antwort JA bzw. NEIN. Er weiß nicht, auf welche Frage geantwortet wurde.

a) Nach Abschluss der Interviews stellt man fest, dass in 36,9 % aller Fälle die Antwort JA notiert wurde. Ein unbekannter Anteil der Befragten hat die Frage auf der rechten Karte mit JA beantwortet. Dieser Anteil werde mit p bezeichnet.

   Es kann davon ausgegangen werden, dass jede der drei Karten in etwa $1/3$ aller Fälle gezogen wurde.

   Stellen Sie die Situation als zweistufiges Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar: Stufe 1 = Ziehen der Karte, Stufe 2 = Beantworten der Frage auf der Karte. Erläutern Sie anhand des Baumdiagramms, dass p *die Gleichung*

$$\frac{1}{3}+\frac{p}{3}=0{,}369$$

   erfüllen muss, und berechnen Sie p *.*

b) Aufgrund der Interviews geht das Forschungsinstitut davon aus, dass 10,7 % aller Jugendlichen in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatten, dass also $p=0{,}107$ ist.

   Erläutern Sie, dass dann die Wahrscheinlichkeit, in einer Gruppe von n *Jugendlichen mindestens einen zu finden, der in den letzten 6 Monate ungeschützten Geschlechtsverkehr* *mit verschiedenen Partnern hatte, mit dem Term $1-0{,}893^n$ berechnet werden kann. Ermitteln Sie hiermit, wie viele Jugendliche man befragen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,99 mindestens einen solchen zu finden.*

c) Eine gymnasiale Oberstufe wird im Moment von 169 jugendlichen Schülerinnen und Schülern besucht.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass zwischen 14 und 20 von diesen in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatten.

d) Im Rahmen eines Projekts aller Biologie-LKs des Gymnasiums diskutieren die Schülerinnen und Schüler, ob die vom Forschungsinstitut angegebene Wahrscheinlichkeit $p=0{,}107$ stimmt. Sie vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit kleiner ist, und wollen dies mit einem einseitigen Hypothesentest belegen.

Es werden 95 jugendliche Schülerinnen und Schüler der der Oberstufe zufällig ausgewählt. Jeder erhält einen Zettel, auf dem sie oder er anonym ankreuzen kann, ob sie oder er in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatte oder nicht.

Begründen Sie, dass $H_0: p \geq 0{,}107$ die geeignete Nullhypothese ist, und bestimmen Sie auf dem Signifikanzniveau $\alpha=0{,}1$ die Entscheidungsregel für den Hypothesentest.

e) Eine ortsansässige Zeitung möchte einen Artikel über das unmoralische Verhalten der heutigen Jugend veröffentlichen. Der verantwortliche Journalist erlangt Kenntnis von der Befragung des Biologie-LKs.

Untersuchen Sie, welches Ergebnis die Befragung liefern muss, damit der Journalist bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10 % darauf schließen kann, dass die Wahrscheinlichkeit für ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern höher ist als 10,7 %.

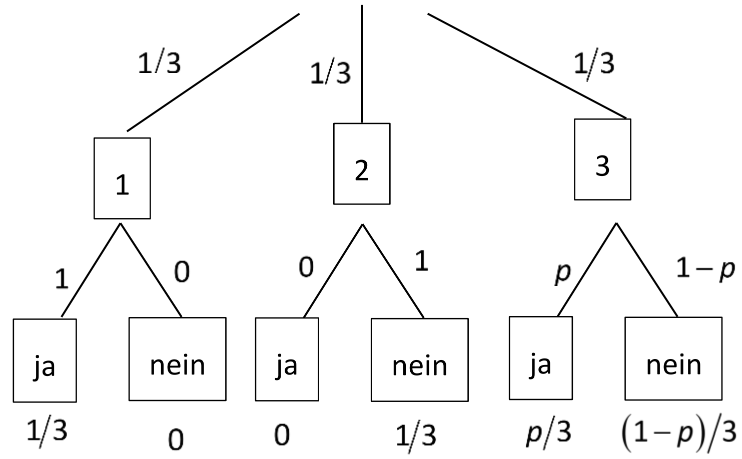
f) Bei der Auswertung der Befragung stellt sich heraus, dass 7 Jugendliche die gestellte Frage bejaht haben.

Beurteilen Sie, ob das Ergebnis auf dem Signifikanzniveau 10 % die Vermutung der Schülerinnen und Schüler oder die Vermutung des Journalisten stützt.

Hinweis. Die speziellen Funktionen des GTR dürfen durchgehend verwendet werden.

Lösungen Vortrag XI

a)



Der Anteil 39,6 %, also $0{,}369$ der Ja-Angaben ergibt sich durch Addition der Pfadwahrscheinlichkeiten, die zu einem Ja-Knoten führen. Dies führt auf die Gleichung $1/3 + 0 + p/3 = 0{,}369$.

$1/3 + p/3 = 0{,}369 \Leftrightarrow 1 + p = 1{,}107 \Leftrightarrow p = 0{,}107$

b) Modellierung durch eine Bernoulli-Kette S, Länge n, Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}107$, $q = 1 - 0{,}107 = 0{,}893$, $P(S = k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}107^k \cdot 0{,}893^{n-k}$

$$0{,}99 \le P(S \ge 1) = 1 - P(S = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}107^0 \cdot 0{,}893^{n-0} = 1 - 0{,}893^n \Leftrightarrow 1 - 0{,}893^n \ge 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 0{,}01 \ge 0{,}893^n \Leftrightarrow \ln 0{,}01 \ge n \cdot \ln 0{,}893 \Leftrightarrow \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}893} \le n \Leftrightarrow n \ge 40{,}69$$

Es müssen also mindestens 41 Jugendliche befragt werden.

c) Länge $n = 169$, Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}107$, $q = 1 - 0{,}107 = 0{,}893$,

$P(14 \le S \le 20) = \text{binomCdf}(169{,}0.107{,}14{,}20) = 06087$

Die Wahrscheinlichkeit, unter 169 jugendlichen Schülerinnen und Schüler zwischen 14 und 20 zu finden, die in den letzten 6 Monaten ungeschützten Geschlechtsverkehr mit verschiedenen Partnern hatten, ist 0,6087.

d) Es soll $p < 0{,}107$ nachgewiesen werden. Deshalb muss die Gegenhypothese $H_1: p < 0{,}107$ und deshalb $H_0: p \ge 0{,}107$ gewählt werden. Somit liegt ein linksseitiger Test vor, weil viele Treffer für eine eher große Trefferwahrscheinlichkeit und somit für H_0 sprechen. Zu bestimmen ist die größteTrefferanzahl k mit $P_{0{,}107}(S \ge k) \le 0{,}1$.

$n = 95$, $p = 0{,}107$

$\text{nsolve}\left(\text{binomCdf}\left(95,0.107,0,k\right)=0.1,k=95\right)$ liefert den Wert 6, Kontrolle

$\text{binomCdf}\left(95,0.107,0,6\right)=0{,}106$, $\text{binomCdf}\left(95,0.107,0,5\right)=0{,}051$

Der Ablehnungsbereich für H_0 geht also bis 5, somit geht der Annahmebereich für H_1 bis 5, und der Hypothese der Schülerinnen und Schüler wird zugestimmt, wenn maximal 5 Personen die Frage mit Ja beantworten.

e) Es soll $p>0{,}107$ nachgewiesen werden. Deshalb muss die Gegenhypothese $H_1: p>0{,}107$ und deshalb $H_0: p\leq 0{,}107$ gewählt werden. Somit liegt ein rechtsseitiger Test vor, weil wenige Treffer für eine eher kleine Trefferwahrscheinlichkeit und somit für H_0 sprechen. Zu bestimmen ist die kleinste Trefferanzahl k mit $P_{0{,}107}\left(S\geq k\right)\leq 0{,}1$.

$n=95$, $p=0{,}107$

$\text{nsolve}\left(\text{binomCdf}\left(95,0.107,k,95\right)=0.1,k=0\right)$ liefert den Wert 14, Kontrolle

$\text{binomCdf}\left(95,0.107,14,95\right)=0{,}135$, $\text{binomCdf}\left(95,0.107,15,95\right)=0{,}08$

Der Ablehnungsbereich für H_0 beginnt also bei 95, somit beginnt der Annahmebereich für H_1 bei 15, und der Hypothese des Journalisten wird zugestimmt, wenn mindestens 15 Personen die Frage mit Ja beantworten.

f) Das Ergebnis 7 liegt bei beiden Tests nicht im Annahmebereich, sodass das Ergebnis weder die Hypothese der Schülerinnen und Schüler noch die Hypothese des Journalisten stützt.