
Mehrstufige Prozesse und Lineare Gleichungssysteme

---

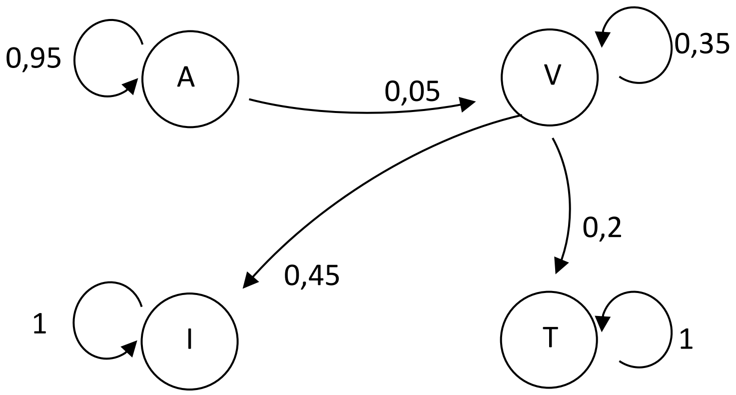
1. Ziele der Lerneinheit

In der folgenden Lerneinheit lernen Sie,

- was ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist.
- welche Bedeutung lineare Gleichungssysteme im Kontext der mehrstufigen Prozesse haben.
- wie man manche LGS ad hoc lösen kann.
- warum es sinnvoll ist, ein LGS auf Zeilenstufenform zu bringen.
- wie man ein LGS mithilfe des Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform bringt.
- dass ein LGS keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben kann, und woran man erkennt, welcher der drei Fälle vorliegt.
- was man unter einer partikulären Lösung versteht.
- was man unter der inversen Matrix versteht.
- wie man die inverse Matrix berechnen kann.
- wie man die inverse Matrix zum Lösen eines LGS verwenden kann.
- wie man den GTR beim Lösen linearer Gleichungssysteme und beim Berechnen der inversen Matrix verwenden kann.

2. Nochmals die Pandemie-Simulation

Durch den folgenden Gozintographen simulieren Mathematiker eines Think Tanks eine durch einen Virus hervorgerufene Pandemie in einer Population von Menschen,



wobei die Zustände die Ansteckbaren (A), die mit dem Virus infizierten (V), die Immunen (I) und die Toten (T) kennzeichnen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten beziehen sich dabei auf den Zeitraum von einem Tag.

Während bei den Wissenschaftlern bislang der Blick in die Zukunft im Vordergrund stand, überlegen Sie nun Methoden, von einer gegebenen Verteilung aus in die Vergangenheit zu schauen und zu fragen: Wie sind die aktuellen Zahlen zustande gekommen?

Exemplarisch untersuchen sie, wie die durch den Vektor $\begin{pmatrix} 356.250 \\ 38.000 \\ 344.750 \\ 261.000 \end{pmatrix}$ beschriebene heutige Verteilung von 1.000.000 Individuen auf die vier Zustände zustande gekommen ist. Sie suchen also eine Anfangsverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, sodass

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 356.250 \\ 38.000 \\ 344.750 \\ 261.000 \end{pmatrix}$$

ist. Sie multiplizieren zunächst auf der linken Seite die Matrix mit dem Vektor und erhalten die Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 0{,}95x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ 0{,}05x_1 + 0{,}35x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ 0x_1 + 0{,}45x_2 + 1x_3 + 0x_4 \\ 0x_1 + 0{,}2x_2 + 0x_3 + 1x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 356.250 \\ 38.000 \\ 344.750 \\ 261.000 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergeben sich vier Gleichungen mit vier Unbekannten:

$$\begin{array}{rlllllllll} \text{I} & 0{,}95x_1 & & & & & & & = & 356.250 \\ \text{II} & 0{,}05x_1 & + & 0{,}35x_2 & & & & & = & 38.000 \\ \text{III} & & & 0{,}45x_2 & + & x_3 & & & = & 344.750 \\ \text{IV} & & & 0{,}2x_2 & & & + & x_4 & = & 261.000 \end{array}$$

Es müssen Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4 gefunden werden, die simultan jede der Gleichungen erfüllen.

Definition. (Lineares Gleichungssystem) Ein System von Gleichungen, in denen auf einer Seite nur Terme der Art $\pm a x_i$ vorkommen, wobei a eine reelle Zahl ist, und auf der anderen Seite jeweils nur eine Zahl steht, heißt **Lineares Gleichungssystem**, kurz: **LGS**.

Es kann stets vektoriell in der Form $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ geschrieben werden. Die Matrix M wird auch **Koeffizientenmatrix** genannt, der Vektor $\vec{y}$ heißt auch **rechte Seite** des LGS.

Das hier zu lösende LGS ist sehr „dünn besetzt“: Viele der Koeffizienten sind Null. Man kann deshalb nach „genauem Hinsehen“ sehr leicht eine Lösung berechnen:

- Aus Gleichung I ergibt sich $0{,}95x_1 = 356.250 \Rightarrow x_1 = \frac{356.250}{0{,}95} = \underline{\underline{375.000}}$.
- Die Lösung für x_1 wird in Gleichung II eingesetzt:

  $0{,}05 \cdot 375.000 + 0{,}35 \cdot x_2 = 38.000$

  $\Leftrightarrow 18.750 + 0{,}35 \cdot x_2 = 38.000 \,\big|\, -18.750$

  $\Leftrightarrow 0{,}35 \cdot x_2 = 19.250 \,\big|\, : 0{,}35$

  $\Leftrightarrow x_2 = \underline{\underline{55.000}}$
- Die Lösung für x_2 wird in Gleichung III eingesetzt:

  $0{,}45 \cdot 55.000 + x_3 = 344.750$

  $\Leftrightarrow 24.750 + x_3 = 344.750 \,\big|\, -24.750$

  $\Leftrightarrow x_3 = \underline{\underline{320.000}}$
- Schließlich wird die Lösung für x_2 in Gleichung IV eingesetzt:

  $0{,}2 \cdot 55.000 + x_4 = 261.000$

  $\Leftrightarrow 11.000 + x_4 = 261.000 \,\big|\, -11.000$

  $\Leftrightarrow x_4 = \underline{\underline{250.000}}$

Am Vortag gab es also 375.000 Ansteckbare, 55.000 Infizierte, 320.000 Immune und 250.000 bereits Gestorbene.

In der Regel sind die Gleichungssysteme nicht so elementar lösbar, dass man sofort aus jeder Gleichung eine der Unbekannten ausrechnen kann, um diese dann in die anderen Gleichungen einzusetzen und die weiteren Unbekannten zu bestimmen. Mithilfe des **Gauß-Algorithmus** werden wir sie zuerst auf eine Form bringen, dass dies funktioniert.

3. Lösen von Linearen Gleichungssystemen mithilfe des Gauß-Algorithmus'

Für das Lösen eines LGS stehen die folgenden Umformungen zur Verfügung, die die Lösungen nicht verändern und deshalb Äquivalenzumformungen heißen:

- Die Reihenfolge der Gleichungen darf verändert werden.
- Jede Gleichung darf mit Zahlen, die nicht Null sind, multipliziert werden, und durch Zahlen ungleich Null geteilt werden.
- Zu jeder Gleichung darf das Vielfache einer der anderen Gleichungen addiert werden; von jeder Gleichung darf das Vielfache einer der anderen Gleichungen abgezogen werden.

Ziel des Gauß-Algorithmus, der auch Gaußsches Eliminationsverfahren genannt wird, ist es, das LGS mithilfe der oben angegebenen Äquivalenzumformungen auf Zeilenstufenform zu bringen:

Definition. (LGS in Zeilenstufenform) Ein LGS ist in **Zeilenstufenform**, wenn in jeder Zeile der niedrigste Index aller Unbekannten in dieser Zeile kleiner ist als der niedrigste Index aller Unbekannten in der folgenden Zeile.

Das folgende LGS ist in Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 5x_1 & - & 0{,}3x_2 & + & 8x_3 & = & 12 \\ \text{II} & & & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ \text{III} & & & & & 0{,}5x_3 & = & -4{,}5 \end{array}$$

Analog zum Vorgehen im Pandemie-Modell lassen sich die Werte der Unbekannten durch Einsetzen von der letzten bis zur ersten Gleichung bestimmen:

- Aus Gleichung III ergibt sich $x_3 = -9$.
- Aus Gleichung III erhält man dann $3x_2 = 6 - 2x_3 = 6 - 2 \cdot (-9) = 24$, also $x_3 = 8$.
- Gleichung I ergibt dann $-6x_1 = 7 + 0{,}3x_2 - 8x_3 = 12 + 0{,}3 \cdot 8 - 8 \cdot (-9) = 86{,}4$, also $x_1 = -14{,}4$.

Die Lösung des LGS ist also $\vec{x} = \begin{pmatrix} -14{,}4 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Das LGS

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & & & 4x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 11 \\ \text{II} & & - & x_2 & + & 10x_3 & = & -23 \\ \text{III} & x_1 & & & + & 8x_3 & = & 6 \end{array}$$

ist dagegen nicht in Zeilenstufenform. (Warum? Finden Sie alle Verstöße gegen die Definition von „Zeilenstufenform".) Der Zeilenstufenform kann man näher kommen, wenn man die erst und die dritte Zeile vertauscht. Es entsteht das LGS

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x_1 & & & + & 8x_3 & = & 6 \\ \text{II} & & - & x_2 & + & 10x_3 & = & -23 \\ \text{III} & & & 4x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 11 \end{array}$$

Um das System endgültig auf Zeilenstufenform zu bringen, müssen die $4x_2$ aus der letzten Zeile verschwinden. Dies kann man erreichen, indem man das -4-fache der zweiten Zeile von der (neuen) dritten Zeile subtrahiert:

$$\begin{array}{c|rcrcr} & 4x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 11 \\ - & 4x_2 & - & 40x_3 & = & 92 \\ \hline & & & 40{,}5x_3 & = & -81 \end{array}$$

Wir notieren diese neue Gleichung an der Stelle von Gleichung III:

$$\text{III} \to \text{III} - (-4) \cdot \text{II}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & x_1 & & & + & 8x_3 & = & 6 \\ \text{II} & & - & x_2 & + & 10x_3 & = & -23 \\ \text{III} & & & & & 40{,}5x_3 & = & -81 \end{array}$$

Durch Rückwärtseinsetzen ergeben sich jetzt die Lösungen:

- Aus Gleichung III ergibt sich $x_3 = -81/40{,}5 = -2$.
- Aus Gleichung III erhält man dann $-x_2 = -23 - 10x_3 = -23 + 10 \cdot 2 = -3$, also $x_2 = 3$.
- Gleichung I ergibt $x_1 = 6 - 8x_3 = 6 + 8 \cdot 2 = 22$.

Kompliziertere LGS werden mit dem Gauß-Algorithmus auf ganz analoge Weise in Zeilenstufenform gebracht. Nur sind hierbei in der Regel mehr Rechenschritte erforderlich. Wie dies funktioniert, zeigen wir anhand der Rent-a-Bike-Anwendung. Hier wurde der Übergang der Fahrräder zwischen drei Stationen A, B und C durch die Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Nehmen wir an, nach einem Tag ist die Verteilung der 100 Fahrräder des Rent-a-Bike-Systems auf die drei Stationen $\vec{y} = \begin{pmatrix} 65 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$. Für den kommenden Tag soll – durch nächtlichen Transport von Fahrrädern zwischen den Stationen – die Startverteilung vom Morgen wiederhergestellt werden. Da die entsprechenden Daten wegen eines Computerproblems nicht mehr vorhanden sind, muss die Startverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ durch Lösen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Hieraus ergibt sich das LGS

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 0{,}8x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 65 \\ \text{II} & 0{,}12x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 10 \\ \text{III} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \end{array}$$

Dieses transformieren wir nun in fünf Schritten in Zeilenstufenform.

Schritt 1. Wir dividieren Gleichung I durch $0{,}8$, um den Koeffizienten von x_1 loszuwerden. Die durchgeführte Umformung vermerken wir oberhalb des Gleichungssystems.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \multicolumn{8}{l}{\text{I} \rightarrow \text{I} : 0{,}8} \\ \text{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \text{II} & 0{,}12x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 10 \\ \text{III} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \end{array}$$

Schritt 2. Um die Unbekannte x_1 aus Gleichung II zu eliminieren, ziehen wir von Gleichung II das $0{,}12$-fache von (der in Schritt 1 neu entstandenen) Gleichung I ab:

$$\begin{array}{r|rcrcrcr} & 0{,}12x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 10 \\ - & 0{,}12x_1 & + & 0{,}075x_2 & + & 0{,}075x_3 & = & 9{,}75 \\ \hline & 0 & - & 0{,}025x_2 & + & 0{,}025x_3 & = & 0{,}25 \end{array}$$

Wir notieren diese neue Gleichung an Stelle der Gleichung II und geben die vorgenommene Umformung mit an:

$$\mathrm{II} \to \mathrm{II} - 0{,}12 \cdot \mathrm{I}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \mathrm{II} & & - & 0{,}025x_2 & + & 0{,}025x_3 & = & 0{,}25 \\ \mathrm{III} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \end{array}$$

Schritt 3. Um die Unbekannte x_1 aus Gleichung III zu eliminieren, ziehen wir von Gleichung III das $0{,}08$-fache von Gleichung I ab:

$$\begin{array}{r|rcrcrcr} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \\ - & 0{,}08x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}05x_3 & = & 6{,}5 \\ \hline & 0 & & 0{,}4x_2 & + & 0{,}35x_3 & = & 18{,}5 \end{array}$$

Wir notieren diese neue Gleichung an Stelle der Gleichung III und geben die vorgenommene Umformung mit an:

$$\mathrm{III} \to 0{,}08 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{III}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \mathrm{II} & & - & 0{,}025x_2 & + & 0{,}025x_3 & = & 0{,}25 \\ \mathrm{III} & & & 0{,}4x_2 & + & 0{,}35x_3 & = & 18{,}5 \end{array}$$

Schritt 4. Wir dividieren Gleichung II durch $-0{,}025$, um den Koeffizienten von x_2 loszuwerden:

$$\mathrm{II} \to \mathrm{II} : \left(-0{,}025\right)$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & = & -10 \\ \mathrm{III} & & & 0{,}4x_2 & + & 0{,}35x_3 & = & 18{,}5 \end{array}$$

Schritt 5. Um die Unbekannte x_2 aus Gleichung III zu eliminieren, ziehen wir von Gleichung III das $-0{,}4$-fache von (der in Schritt 4 neu entstandenen) Gleichung II ab:

$$\begin{array}{r|rcrcr} & 0{,}4x_2 & + & 0{,}35x_3 & = & 18{,}5 \\ - & 0{,}4x_2 & - & 0{,}4x_3 & = & -4 \\ \hline & & & 0{,}75x_3 & = & 22{,}5 \end{array}$$

Wir notieren diese neue Gleichung an Stelle der Gleichung III:

$$\text{III} \rightarrow \text{III} - (-0{,}4) \cdot \text{II}$$

$$\begin{array}{llcccccl} \text{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\ \text{II} & & & x_2 & - & x_3 & = & -10 \\ \text{III} & & & & & 0{,}75x_3 & = & 22{,}5 \end{array}$$

Damit ist das Eliminationsverfahren abgeschlossen. Das Gleichungssystem ist nun in Zeilenstufenform, und die Werte für x_3, x_2 und x_1 können sukzessive berechnet werden:

- Aus Gleichung III $0{,}75x_3 = 22{,}5$ ergibt sich $\underline{\underline{x_3 = 30}}$.
- Dies wird in Gleichung II $x_2 - x_3 = 10$ für x_3 eingesetzt: $x_2 - 30 = -10 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$.
- Die für x_3 und x_2 bereits gefundenen Werte werden nun abschließend in Gleichung I $x_1 + 0{,}625x_2 + 0{,}625x_3 = 81{,}25$ eingesetzt: $x_1 + 0{,}625 \cdot 40 + 0{,}625 \cdot 20 = 81{,}25 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 50}}$.

Der gesuchte Startvektor ist also $\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$. → *Übung 1*

4. Lösungskriterien für lineare Gleichungssysteme

Wir haben bereits im Bereich der Analysis gesehen, dass manche Gleichungen – zum Beispiel quadratische Gleichungen – nicht immer lösbar sind. Andererseits haben manche Gleichungen nicht nur eine, sondern sogar mehrere Lösungen. Wie sieht es im Bereich der Linearen Gleichungssysteme aus? Die oben behandelten Beispiele hatten genau eine Lösung, was in vielen Anwendungen natürlich als Idealfall angesehen werden wird. Leider ist das nicht immer so:

Satz. (Anzahl der Lösungen eines LGS) Ein LGS $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ hat entweder keine, oder genau eine oder unendlich viele paarweise verschiedene Lösungen.

Dies bedeutet, ein LGS kann nicht genau zwei oder genau drei oder genau vier … verschiedene Lösungen haben. Woran man sehen kann, ob ein LGS lösbar ist und ob die Lösung eindeutig ist, verrät der folgende Satz.

Satz. (Lösungskriterium für LGS) Nachdem man das LGS $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ in Zeilenstufenform gebracht hat, hat das Gleichungssystem (schematisch) das folgende Aussehen:

$$\begin{array}{cccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \oplus \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \oplus \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \oplus \\ & & & & & 0 & \otimes \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & \otimes \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \text{ Zeilen} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} s \text{ Zeilen} \end{array}$$

Hierbei steht der Strich an der Stelle des Gleichheitszeichens.

Die mit $\bullet$ gekennzeichneten Bereiche in den ersten r Zeilen enthalten Terme, in denen mindestens eine der Unbekannten vorkommt. Diese Zahl r heißt auch der Rang des LGS bzw. der Koeffizientenmatrix M: $r = \mathrm{rg}(M)$.

Nach diesen ersten r Zeilen des Schemas können sich weitere s „Nullzeilen" anschließen, bei denen links des Gleichheitszeichens nur die Zahl 0 steht.

Die mit $\oplus$ bzw. $\otimes$ gekennzeichneten Bereiche können beliebige Zahlen enthalten.

Für die Anzahl der Lösungen eines LGS mit den Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt:

- Falls $s > 0$ ist und es in dem mit $\otimes$ gekennzeichneten Bereich mindestens eine Zahl gibt, die **nicht** Null ist, dann hat das System **keine** Lösung.
- In allen anderen Fällen – d.h. wenn Nullzeilen auftreten, dann steht auch auf der rechten Seite jeder Nullzeile die Zahl 0 – hat das System
  - **genau eine** Lösung, falls $r = n$ ist;
  - **unendlich viele** Lösungen, falls $r < n$ ist.

Wir schauen uns ein paar Beispiele an.

Beispiel 1. Das oben bereits durchgerechnete LGS

$$\begin{array}{llllllll}
\mathrm{I} & 0{,}8x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 65 \\
\mathrm{II} & 0{,}12x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 10 \\
\mathrm{III} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25
\end{array}$$

mit der Zeilenstufenform

$$\begin{array}{llrrrrrr}
\mathrm{I} & x_1 & + & 0{,}625x_2 & + & 0{,}625x_3 & = & 81{,}25 \\
\mathrm{II} & & & x_2 & - & x_3 & = & -10 \\
\mathrm{III} & & & & & 0{,}75x_3 & = & 22{,}5
\end{array}$$

ist ein Beispiel für den Fall $s = 0$. Es hat wie gesehen genau eine Lösung, die durch „Rückwärtslösen und Einsetzen" beginnend mit der letzten Gleichung gelöst werden kann

Beispiel 2. Wir transformieren das System

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
\mathrm{I} & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\
\mathrm{II} & -4x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & = & -23 \\
\mathrm{III} & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 15
\end{array}$$

in Zeilenstufenform. Dabei fassen wir jeweils mehrere Schritte zusammen und lassen Nebenrechnungen weg.

Schritt 1 $\mathrm{I} \to \mathrm{I} : 2$

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
\mathrm{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 1{,}5x_3 & = & 5{,}5 \\
\mathrm{II} & -4x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & = & -23 \\
\mathrm{III} & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 15
\end{array}$$

Schritt 2 $\quad \mathrm{II} \to \mathrm{II} - (-4) \cdot \mathrm{I}$ und $\mathrm{III} \to \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I}$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 1{,}5x_3 & = & 5{,}5 \\ \mathrm{II} & & & & & x_3 & = & -1 \\ \mathrm{III} & & & & - & 4x_3 & = & 4 \end{array}$$

Beachten Sie, dass nach unserer Definition das System noch nicht in Zeilenstufenform ist: Die letzte Zeile muss eine Unbekannte weniger enthalten als die Zeile zuvor. Deshalb ist noch eine weitere Umformung notwendig.

Schritt 3 $\quad \mathrm{III} \to \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{II}$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 1{,}5x_3 & = & 5{,}5 \\ \mathrm{II} & & & & & x_3 & = & -1 \\ \mathrm{III} & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

In diesem Fall ist also $s = 1$. Aus der vorletzten Zeile liest man ab: $x_3 = -1$. Setzt man dies in die erste Zeile ein und formt diese nach x_1 um, ergibt sich die Gleichung $x_1 = 7 + 2x_2$. Dies bedeutet: Für jede Wahl von x_2 ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 + x_2 \\ x_2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des LGS. Es gibt also in der Tat unendlich viele Lösungen. Wählen wir zum Beispiel $x_2 = 3$, so ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine „partikuläre" Lösung des LGS.

Definition (partikuläre Lösung). Jede Lösung des LGS $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ heißt auch eine **partikuläre Lösung** des LGS.

Beispiel 3. Wir ändern nun das LGS aus Beispiel 2 auf der rechten Seite der letzten Zeile leicht ab:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ \mathrm{II} & -4x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & = & -23 \\ \mathrm{III} & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & 10 \end{array}$$

Mit genau denselben Rechnungen wie eben kommen wir nun zu der Zeilenstufenform

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \mathrm{I} & x_1 & - & 2x_2 & + & 1{,}5x_3 & = & 5{,}5 \\ \mathrm{II} & & & & & x_3 & = & -1 \\ \mathrm{III} & & & & & 0 & = & -5 \end{array}$$

Wieder ist $s = 1$. Diesmal jedoch ist die letzte Zeile eine Nullzeile mit rechter Seite ungleich Null. Da die Gleichung $0 = -5$ durch keine Wahl der Unbekannten erfüllt werden kann, hat das LGS keine Lösung

5. Die inverse Matrix

Handelte es sich bei einem LGS $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ um eine Gleichung im Bereich der reellen Zahlen, könnte man einfach durch M teilen oder – gleichbedeutend – mit M^{-1} multiplizieren und die Gleichung unmittelbar nach $\vec{x}$ auflösen:

$$M \cdot \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{y} .$$

Leider ist die Sache komplizierter, wenn wir nicht mit Zahlen, sondern mit Matrizen rechnen. Dies hängt übrigens damit zusammen, dass die Matrizenmultiplikation nicht nullteilerfrei ist, also aus $M \cdot N = O$ nicht geschlossen werden, dass $M = O$ oder $N = O$ ist.

Da das „Teilen durch M" zu einer eindeutigen Lösung des LGS führen würde, kann dieses Verfahren überhaupt nur dann möglich sein, wenn das LGS eindeutig lösbar ist. Wie wir wissen, ist dies genau dann der Fall, wenn die Koeffizientenmatrix quadratisch und der Rang der Koeffizientenmatrix größtmöglich (also n bei einer $n \times n$-Koeffizientenmatrix) ist. Das folgende Resultat zeigt, dass in dieser Situation auch wirklich die inverse Matrix existiert:

Satz. (Eigenschaften und Existenz der inversen Matrix)
Es sei M eine $n \times n$-Matrix. Genau dann, wenn $\text{rg}\left(M\right) = n$ ist, existiert eine zu M **inverse Matrix** M^{-1}. Dann gilt $M^{-1} \cdot M = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist, die außer Einsen auf der Diagonalen nur Nullen als Einträge hat:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Lösung des LGS $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ist dann $\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{y}$.

Wie M^{-1} berechnet werden kann, sehen wir uns nun am Beispiel der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

aus der Rent-a-Bike-Anwendung an.

Wir erweitern zunächst die Matrix nach rechts, indem wir hier die Einheitsmatrix E_3 ergänzen. Wir lassen die Klammern weg und deuten durch einen Stich die Grenze zwischen A und E_3 an:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ziel ist es, diese Matrix mit den für LGS zulässigen Äquivalenzumformungen so umzuformen, dass links vom Strich die Einheitsmatrix entsteht. Der Teil rechts vom Strich ist dann die inverse Matrix. Zunächst bringen wir die Matrix auf Zeilenstufenform:

Schritt 1. Wir dividieren die erste Zeile durch $0{,}8$:

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Schritt 2. Indem wir das $0{,}12$-fache der ersten Zeile von der zweiten und das $0{,}08$-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile abziehen, erreichen wir Nullen in der ersten Spalte:

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}025 & 0{,}025 & -0{,}15 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}35 & -0{,}1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Schritt 3. Wir dividieren die zweite Zeile durch $-0{,}025$:

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -40 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}35 & -0{,}1 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Schritt 4. Wir ziehen das $0{,}4$-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile ab:

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}75 & -2{,}5 & 16 & 1 \end{array}\right.$$

Schritt 5. Wir dividieren die dritte Zeile durch $0{,}75$:

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0{,}625 & 1{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{64}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Hiermit ist die Matrix auf Zeilenstufenform. Wir erzeugen nun Nullen oberhalb der Diagonale links des Striches, indem wir zunächst zur zweiten Gleichung die dritte addieren und dann von der ersten das $0{,}625$-fache der dritten Gleichung abziehen:

$$\left.\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0{,}625 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{40}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{56}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{64}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Als letztes wird von der ersten Gleichung das $0{,}625$-fache der zweiten Gleichung abgezogen:

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{56}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{64}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Die inverse Matrix zu $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ ist also $M^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & -5/3 & 5/3 \\ 8/3 & -56/3 & 4/3 \\ -10/3 & 64/3 & 4/3 \end{pmatrix}$.

Die Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}45 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

ist dann

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 & -5/3 & 5/3 \\ 8/3 & -56/3 & 4/3 \\ -10/3 & 64/3 & 4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 65 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix},$$

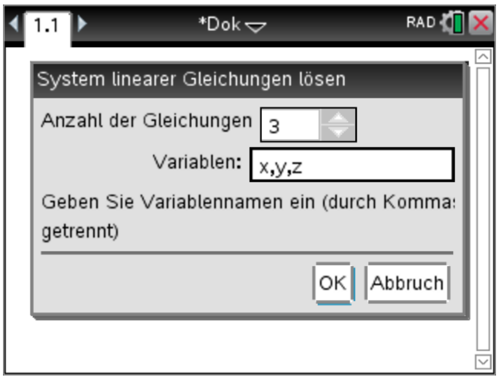
wie bereits oben berechnet. In der Regel ist es einfacher, ein LGS mithilfe des Gauß-Algorithmus zu lösen, als die inverse Matrix zu bestimmen. → *Übung 2*

6. Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem GTR

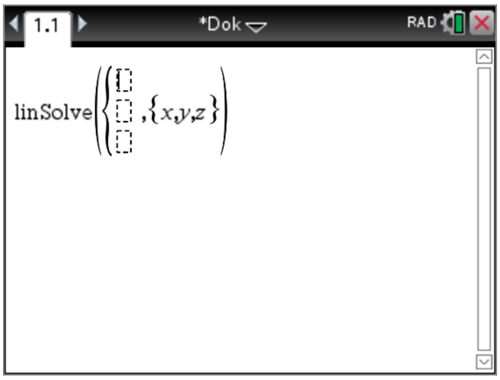
Lineare Gleichungssysteme können auch mit dem GTR gelöst werden. Um z.B. das Gleichungssystem

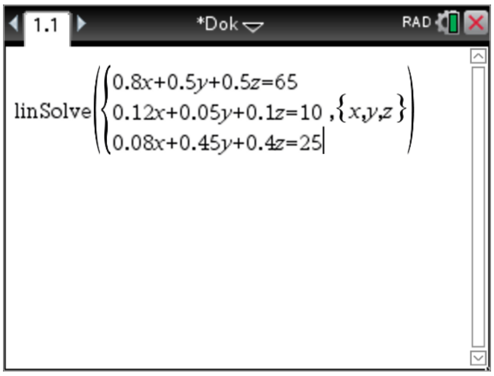
$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 0{,}8x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}5x_3 & = & 65 \\ \text{II} & 0{,}12x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & = & 10 \\ \text{III} & 0{,}08x_1 & + & 0{,}45x_2 & + & 0{,}4x_3 & = & 25 \end{array}$$

zu lösen, rufen Sie mit Sie [menu] [3] [2] den Löser für lineare Gleichungssysteme auf und geben Sie bei „Anzahl der Gleichungen“ die Zahl 2 ein. Die Eingabe in der Zeile „Variablen“ lassen Sie unverändert: Satt mit x_1, x_2, x_3 rechnet der GTR mit x, y, z. Tippen Sie OK.

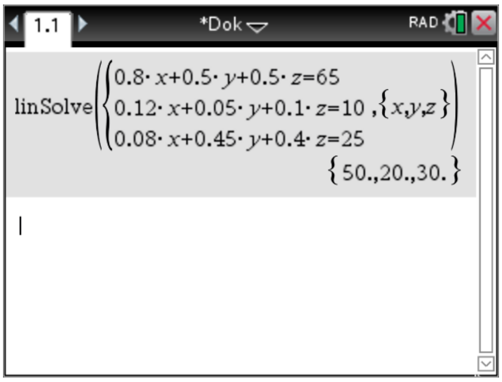


Geben Sie in der folgenden Maske die drei Gleichungen mit den Unbekannten x,y,z statt x_1,x_2,x_3 ein.

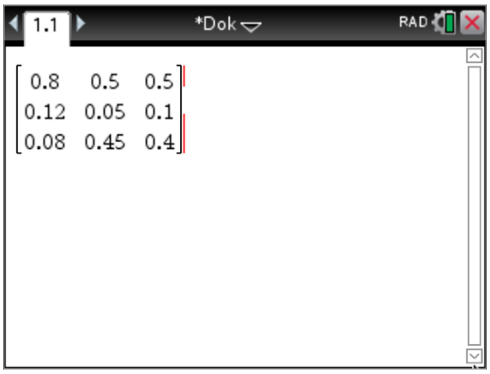




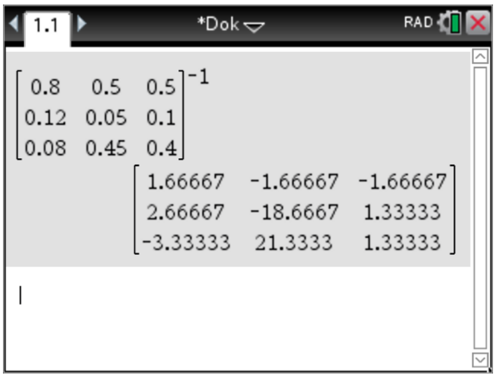
Tippen Sie `enter`



Mithilfe des GTR kann auch automatisch die inverse Matrix bestimmt werden. Legen Sie hierzu z.B. durch die Eingabe Sie `menu` `7` `1` `1` eine neue Matrix mit 3 Zeilen und drei Spalten an und tragen Sie dann die Einträge in die Matrix ein:



Verlassen Sie die Matrix nach rechts mithilfe der Pfeiltaste, ergänzen Sie `^` `(–)` `1` und tippen Sie `enter`



Übungen zur Lerneinheit
Mehrstufige Prozesse und Matrizenmultiplikation

1.1.1 Übung 1.

1. Lösen Sie die folgenden LGS.

a) $$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 &= 5 \\ 2x_2 &= -10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 1{,}6x_1 &= -3{,}2 \\ -5{,}2x_1 - 5{,}2x_2 &= 5{,}2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} -15x_1 - 8x_2 &= -3{,}5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -5{,}5 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} -7{,}2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 3{,}6x_1 - 3{,}6x_2 &= -9 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 0{,}8x_1 - 0{,}4x_2 &= 3{,}6 \\ 5{,}1x_1 - 3{,}4x_2 &= 37{,}4 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -1{,}8x_1 - 1{,}2x_2 &= 6 \\ -6{,}3x_1 - 5{,}6x_2 &= -5{,}6 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 2{,}5x_1 + 2{,}5x_2 &= 25 \\ x_1 + x_2 &= 10 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 8x_1 - 4x_2 &= 9 \\ -4x_1 + 2x_2 &= -5 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} -2{,}4x_1 - 3{,}2x_2 &= 21{,}6 \\ -5{,}4x_1 - 3{,}6x_2 &= -5{,}4 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} -5x_1 + 11x_2 &= -13 \\ 12{,}5x_1 - 27{,}5x_2 &= 32{,}5 \end{aligned}$$

2. Lösen Sie die folgenden LGS.

a) $$\begin{aligned} -6x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= -6 \\ x_2 &= 17 \\ -3x_1 - 2x_2 &= 17 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -3x_2 + 4{,}5x_3 &= 21 \\ -0{,}7x_2 + 1{,}4x_3 &= -11{,}2 \\ -2{,}4x_1 + 2{,}4x_2 - 4{,}8x_3 &= -2{,}4 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ -1{,}2x_1 - 0{,}6x_2 - 0{,}3x_3 &= -2{,}1 \\ x_2 + 2x_3 &= -13 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_3 &= -8 \\ 3x_1 + 3x_2 &= -21 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 0{,}8x_1 - x_2 + 0{,}2x_3 &= 1{,}2 \\ -4{,}5x_1 + 5{,}4x_2 - 2{,}7x_3 &= -8{,}1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} -11{,}2x_1 - 2{,}8x_2 &= 5{,}6 \\ 5{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 9{,}9x_3 &= 0 \\ -2{,}25x_1 + 0{,}75x_2 + 6{,}75x_3 &= 3 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 3{,}9x_1 + 11{,}7x_3 &= 9{,}75 \\ 3{,}2x_2 - 0{,}8x_3 &= -6 \\ 5{,}7x_1 + 15{,}2x_3 &= -5{,}7 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} -4{,}5x_1 - 6x_2 \phantom{- 0{,}5x_3} &= -18 \\ -2{,}1x_1 - 4{,}2x_2 \phantom{- 0{,}5x_3} &= 4{,}2 \\ -1{,}5x_1 - 2x_2 - 0{,}5x_3 &= -10{,}5 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} -2{,}1x_1 - 2{,}8x_2 - 4{,}2x_3 &= 0{,}7 \\ - 0{,}4x_2 - 0{,}8x_3 &= 4{,}8 \\ -1{,}8x_1 - 1{,}8x_2 - 3{,}6x_3 &= -12{,}6 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 7x_1 - 3{,}5x_2 - 10{,}5x_3 &= -6 \\ 3x_1 - 0{,}5x_2 - 5{,}5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3. Lösen Sie die folgenden LGS.

a) $$\begin{aligned} 6x_2 - 5x_4 &= 37{,}5 \\ 10x_1 + 2x_2 &= 20 \\ -8x_1 - 3x_3 &= 10 \\ 7x_1 + 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -x_1 - 2x_4 &= -17{,}5 \\ -4x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 8x_4 &= 2 \\ -x_1 &= 18{,}5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_4 &= 11 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} -12x_1 - 3x_3 + 16x_4 &= 5 \\ 8x_1 - 18x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= -7{,}5 \\ - 3x_2 + 4x_4 &= -11{,}5 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 10 \\ -4x_1 - 4x_2 + 2x_4 &= -12 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -8 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} -5x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 9x_4 &= 30 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 16 \end{aligned}$$

4. Lösen Sie die folgenden LGS.

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

f) $$\begin{pmatrix} -3{,}2 & 4{,}8 & -1{,}6 \\ 3{,}2 & -6{,}4 & 3{,}2 \\ -1{,}6 & -3{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 2{,}8 \\ -4{,}9 \end{pmatrix}$$

g) $$\begin{pmatrix} -1{,}6 & 1{,}8 & 1 \\ 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & -0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} -1{,}6 & 1{,}6 & 3{,}2 \\ -1{,}6 & 1{,}6 & -0{,}8 \\ 0 & 3{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & 0{,}4 \\ -1{,}2 & 0{,}8 & -0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -0{,}4 & -0{,}4 & -0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 1{,}2 \\ 0{,}2 & -1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 5 & -2{,}5 & 1{,}25 \\ -1{,}25 & 6{,}25 & 1{,}25 \\ 6{,}25 & 3{,}75 & 3{,}75 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}125 & -0{,}125 \\ -0{,}375 & 0{,}125 & -0{,}125 \\ 0{,}125 & 0 & -0{,}125 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -0{,}2 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}3 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & -0{,}2 & -0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

5. Für den täglichen Übergang zwischen drei Radstationen A, B und C mit der Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

stellt man am Abend eines Tages fest, dass sich in A 22 %, in B 48 % und in C 30 % der Fahrräder befinden. Berechnen Sie, wie die Fahrräder am Morgen des Tages verteilt waren.

6. In einer Gruppe von 10.000 Menschen finden sich 4.775 Nichtraucher, 1.780 Gelegenheitsraucher und 3.445 tägliche Raucher. Berechnen Sie die Anzahl der Nichtraucher, Gelegenheitsraucher und täglichen Raucher vor einem Jahr, wenn für die jährlichen Übergänge zwischen den Nichtrauchern, Gelegenheitsrauchern und täglichen Rauchern die Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}35 & 0{,}05 \\ 0{,}12 & 0{,}33 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

angenommen wird.

7. In einer Population von Insekten wurde die Verteilung zwei verschiedener Merkmale A und B über längere Zeit beobachtet. Dabei hatten Insekten mit Merkmal A zu 70 % Nachkommen mit Merkmal A und Insekten mit Merkmal B zu 20 % Nachkommen mit Merkmal A, was durch die Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix},$$

ausgedrückt wird. In der F4-Generation findet man 1.575 Insekten mit Merkmal A und 2.425 Insekten mit Merkmal B. Ermitteln Sie, wie die Merkmale in der P-Generation verteilt waren.

8. Die Farbe (grün oder gelb) der Schoten einer Erbsenpflanze wird durch zwei Gene bestimmt, wobei das Gen G für grüne Farbe dominant und das Gen g für gelbe Farbe rezessiv ist. Damit sind folgende drei Genotypen möglich
   - GG: beide Gene dominant, man spricht von reinerbig dominant
   - Gg: ein Gen dominant, ein Gen rezessiv, man spricht von mischerbig
   - gg: beide Gene rezessiv, man spricht von reinerbig rezessiv

Wird ein *mischerbiges Elternteil* mit einer sehr großen Population von Pflanzen beliebigen Genotyps gekreuzt, werden die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang „Genotyp 2. Elternteil“ $\rightarrow$ „Genotyp Nachkomme“ durch die Übergangsmatrix

$$\begin{array}{ccc} & & \text{von} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{GG} & \text{Gg} & \text{gg} \end{array} \\ & \begin{array}{c} \text{GG} \\ \text{Gg} \\ \text{gg} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

nach (Zeilen)

gegeben. Unter den Nachkommen haben 50 % den Genotyp Gg und 30 % den Genotyp gg. Berechnen Sie die Verteilung der Genotypen in der Generation, die mit der mischerbigen Pflanze gekreuzt wurde.

9. Werden in der Situation der vorstehenden Aufgabe als erstes Elternteil nur reinerbig dominante Erbsen verwendet, werden die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang „Genotyp 2. Elternteil“ $\rightarrow$ „Genotyp Nachkomme“ durch die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. In diesem Fall gibt es unter den Nachkommen keine Erbsen mit Genotyp gg.

a) Unter den Nachkommen haben 83 % den Genotyp Gg. Berechnen Sie die Verteilung der Genotypen unter den Pflanzen des zweiten Elternteils.

b) Es sei eine beliebige Verteilung der Genotypen vorgegeben, wobei der 0 % der Pflanzen den Genotyp gg haben sollen. Bestimmen Sie alle möglichen Verteilungen für die Genotypen unter den Pflanzen des zweiten Elternteils, sodass durch Kreuzung unter den Nachkommen die vorgegebene Verteilung entsteht.

Übung 2. Berechnen Sie für die Koeffizientenmatrizen aus Übung 1 Nr. 4 jeweils die inverse Matrix und Lösen Sie dann die LGS mithilfe dieser Matrix.